Метод Эйлера для решения ОДУ 1 порядка

Многие задачи науки и техники сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). ОДУ называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных первого и выше порядков от искомой функции. В общем виде ОДУ можно записать следующим образом:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Общее решение такого уравнения содержит n произвольных постоянных, которые можно определить, задав дополнительные условия. В случае постановки задачи в зависимости от времени необходимо задать начальные условия – значение функции и всех ее производных до (n-1) в начальный момент времени. Такая задача называется задачей Коши.

Для ОДУ 1го порядка можно говорить только о задаче Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x = x_0) = y_0 \end{cases}$$

Не всегда возможно решить данную задачу аналитически. В связи с этим разработаны методы численного решения ОДУ.

Для численного решения ОДУ необходимо поставить задачу:

Решить ОДУ $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ при условии $y(x_0) = y_0$.

При нахождении приближенного решения будем считать, что вычисления проводятся с расчетным шагом: $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$, расчетными узлами служат точки $x_i = x_0 + ih, (i = 0,1,2,....n)$ промежутка $[x_0, x_n]$.

Целью решения задачи является построение таблицы

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

т.е. ищутся приближенные значения y в узлах сетки.

Выведем формулу Эйлера, Интегрируя уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, получим

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

Интеграл – это площаль фигуры под графиком f(x,y). Вполне естественным (но не единственным) путем получения численного решения является замена в нем интеграла прямоугольником, в котором высота определяется значением функции на левой границе $f(x_i, y_i)$, или по-другому, квадратурной формулой численного интегрирования левых прямоугольников первого порядка.

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx = hf(x_i, y_i)$$

Получаем явную формулу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Порядок расчетов:

Зная x_0 и $y(x_0) = y_0$, находим $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, затем $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ и так далее.

Модифицированный метод Эйлера: в данном методе вычисление y_{i+1} состоит из двух этапов:

$$\breve{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right)$$

Данная схема называется еще методом предиктор – корректор (предсказывающее – исправляющее). На первом этапе приближенное значение предсказывается с невысокой точностью (h), а на втором этапе это предсказание исправляется, так что результирующее значение имеет второй порядок точности, более высокий, чем обычный метод Эйлера.

Какой шаг интегрирования выбрать для решения дискретной модели? Чем меньше шаг, тем точнее численное решение приближает решение аналитическое, однако, бесконечно маленький шаг приведет к бесконечному времени вычислений, что неоправданно. Для выбора шага следует руководствоваться следующими соображениями: 1) шаг интегрирования h должен быть много меньше размеров системы 2) относительная погрешность должна быть меньше 5%.

Как посчитать относительную погрешность:

Для выбранного значения шага h на выбранном тестовом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдем значение $y_{i+1}(h)$, затем уменьшим шаг в два раза h/2 и найдем уточненное значение на том же отрезке $y_{i+1}(h/2)$. При устойчивом процессе чем меньше шаг, тем ближе мы подходим к истинному (ананлитическому) решению, т.е. решения разностных уравнений для шагов интегрирования h и h/2 будут сближаться. Относительную погрешность можно оценить как:

$$\frac{\left|y_{i+1}(h/2) - y_{i+1}(h)\right|}{\left|y_{i+1}(h/2)\right|} < \varepsilon$$

Где ε - наперед заданная точность (например, 5%). Если левая часть удовлетворяет неравенству, то считаем, что выбранный шаг можно использовать для интегрирования уравнения.

Пример расчета задачи в Excel см. : Р.Ф. Маликов. «Практикум по компьютерному моделированию», стр. 45

Метод прогноза-коррекции см. : Р.Ф. Маликов. «Практикум по компьютерному моделированию», стр. 35 (модифицированный метод Эйлера) или см. файлы в папке.

Проект №1. Срок сдачи – 16 апреля 2022 г.

Варианты распределены в столбце F таблицы https://docs.google.com/spreadsheets/d/1keseC9l_v42i5t99emtL1ksOVIYb1ulUJcgZFTxvilg/edit#gid=1970457069.

Вариант можно поменять, согласовав это с преподавателем практики.

Проекты можно делать в группах по 2 человека.

Задание:

1. Для выбранной задачи написать уравнения движения, расписать их по проекциям на оси координат.
2. Написать аналитическое решение задачи в общем виде.
3. Выбрать несколько конкретных значений параметров задачи и начальные условия.
4. Численно решить задачу, построить графики.
5. Сравнить численное решение с аналитическим, построив решения на одном графике.
6. Сделать отчет с формулировкой задачи, аналитическим решением (можно от руки написать (в электронный отчет можно вставить фото)), описанием вывода численного решения, кодом программы (или таблицами Excel), графиками и выводами.

Вариант №1 Тело, брошенное под углом к горизонту

1.1. Баскетболист может бросить мяч со скоростью v0 в любом направлении. Найти, как далеко долетит мяч. Сопротивлением воздуха (силой сопротивления среды) пренебречь.

Написать программу, которая а) рассчитает как далеко долетит мяч, в зависимости от начальной скорости и направления б) при введенных координатах баскетбольного кольца x и y (продоьная координата и высота) рассчитает начальную скорость и угол, под которым нужно бросить мяч.

Проведите численный эксперимент по исследованию траектории мяча в зависимости от начальной скорости и угла.

Сравните с аналитическим решением полученный результат.

1.2. Добавьте в расчет сопротивление среды. Как изменится полученный результат?

Проведите численный эксперимент по исследованию траектории мяча в зависимости от начальной скорости и угла и коэффициента сопротивления среды.

Литература:

Р.Ф. Маликов. «Практикум по компьютерному моделированию», стр. 71 задача 4.1. и стр. 75 задача 4.3, стр. 65 задача 1 (Численное решение)

Е.И. Бутиков «Физика в примерах и задачах», стр. 23 (Аналитическое решение)

Вариант №2 Законы Кеплера

Смоделировать движение кометы в поле тяготения Солнца. Продемонстрировать законы Кеплера.

2.1. Найти траекторию движения кометы в поле тяготения Солнца, у которой на расстоянии 100 астрономических единиц от Солнца (1 а.е. =$1.5\cdot10^{11}$ м, расстояние от Земли до Солнца) скорость направлена под углом 30^o к оси комета-Солнце и равна 2 км/с.

2.2. Провести численный эксперимент. Найти начальную скорость, при которой траектория движения кометы является эллипсом, гиперболой. Может ли комета двигаться по окружности? В каком случае комета полетит по прямой?

2.3. Продемонстрировать в численном эксперименте выполнимость трех законов Кеплера.

Литература:

Р.Ф. Маликов. «Практикум по компьютерному моделированию», стр. 46 задача 3, стр. 57 пример 1, стр. 87 задача 4.9. (Численное решение)

Е.И. Бутиков «Компьютерное моделирование движения космических тел», стр. 17 - 31 (Аналитическое решение)

Вариант №3 Реактивное движение

Смоделировать реактивное движение ракеты с переменной массой.

3.1. Провести численный эксперимент взлета ракеты с переменной массой, если начальная масса m_0=2·10^7 кг, полезная масса ракеты (после полного выгорания топлива) равна $m_{кон}$=2·10^5 кг , масса ракеты зависит от времени по закону $m= m_0-\alpha t$, α=2·10^5 , скорость истечения газа из сопла равна u=5 м/с . Сопротивлением среды пренебречь.

3.2. Провести численный эксперимент, меняя начальную скорость, коэффициент расхода топлива α , начальную и конечную массу ракеты. Выяснить условия достижения первой космической скорости.

3.3. Учесть сопротивление среды по закону $F=kv^2$, где k – коэффициент пропорциональности, v – скорость ракеты. При каком значении коэффициента k достигается первая космическая скорость?

Литература:

Р.Ф. Маликов. «Практикум по компьютерному моделированию», стр. 94 задача 4.12 (Описание алгоритма решения)

Е.И. Бутиков «Компьютерное моделирование движения космических тел», стр. 51 - 55 раздел 3.2.3 (Аналитическое решение)