

**Лабораторная работа № 2.07V
(VirtualLab)**

**Определение показателя адиабаты
воздуха методом Рюхарда**

Содержание

Цель работы	2
Задачи	2
Введение	2
Лабораторная установка	10
Проведение измерений	14
Обработка результатов	14

Цель работы

Значение показателя адиабаты воздуха при условиях, близких к нормальным.

Задачи

1. Измерение периода колебаний поршня внутри вертикальной стеклянной трубки.
2. Построение графиков зависимостей квадрата циклической частоты колебаний поршня для трех различных значений объема воздуха и определение их угловых коэффициентов.

Введение

Основы термодинамики идеального газа

Идеальный газ – это модель термодинамической системы, состоящей из многих частиц (молекул), которая предполагает, что потенциальной энергией их взаимодействия можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией их движения, как поступательного, так и вращательного. Модель идеального газа можно использовать при изучении разреженных реальных газов, если плотность реального газа настолько мала, что суммарным объемом молекул газа можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, т.е. молекулы можно рассматривать как материальные точки, а взаимодействия молекул со стенками сосуда и между собой считать абсолютно упругими, а также если в газе не происходит химических реакций. Такие газы, как воздух, азот, кислород даже при обычных условиях, т.е. при комнатной температуре и нормальном давлении мало отличаются от идеального газа.

Состояние термодинамической системы (в частности, идеального газа) может быть задано значениями измеряемых физических величин, которые называются макроскопическими параметрами P, V, T : давление, объем и температура. Если при отсутствии внешних воздействий все параметры сохраняют свои значения сколь угодно долго, состояние системы называется равновесным. Функциональная зависимость, существующая между параметрами состояния, называется уравнением состояния. Для неиз-

менной массы идеального газа уравнением состояния является уравнение Клапейрона-Менделеева:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

где m - масса газа, μ - масса одного моля (числа Авогадро $N_A \approx 6,03 \cdot 10^{23}$ молекул) данного газа, $R \approx 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - универсальная газовая постоянная. Отношение $\nu = \frac{m}{\mu}$ равно числу молей газа.

Внутренняя энергия U - это один из важнейших параметров термодинамической системы. Под внутренней энергией идеального газа понимается кинетическая энергия беспорядочного движения всех его молекул. Она может меняться только при взаимодействии системы с внешними телами. Каждому состоянию системы присуще только одно определенное значение энергии, причем изменение энергии при переходе из одного состояния в другое не зависит от промежуточных состояний системы, а определяется только параметрами начального и конечного состояний. Величина, обладающая таким свойством, называется функцией состояния. Также внутренняя энергия является аддитивной величиной: энергия системы равна сумме энергий частей, составляющих систему.

Из молекулярно-кинетической теории идеального газа следует, что средняя кинетическая энергия одной молекулы $\langle \varepsilon \rangle$ равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (2)$$

где $k = \frac{R}{N_A} = 1,380649 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ - постоянная Больцмана, а i - число степеней свободы молекулы.

Число степеней свободы i можно определить как количество независимых переменных, которые необходимы для однозначного задания положения молекулы в пространстве. Например, материальная точка в трехмерном пространстве обладает тремя степенями свободы, т.к. её положение определяется тремя координатами: $\{x, y, z\}$. Молекулу одноатомного газа можно считать материальной точкой, поэтому для одноатомного газа $i = 3$.

Молекула двухатомного газа представляет собой совокупность химически связанных между собой двух атомов. У каждого из них есть возможность вращения относительно осей, перпендикулярных к оси самой молекулы. При условиях, близких к нормальным, длину химической связи можно считать неизменной, а саму молекулу жесткой структурой. Вращение относительно собственной оси симметрии не изменяет её положения в пространстве, т.к. момент инерции относительно этой оси I_z равен нулю, следовательно, и кинетическая энергия $E_z = \frac{I\omega^2}{2}$ связанная с таким типом движения нулевая. Поэтому для двухатомного газа число степеней свободы $i = 5$: три поступательные и две вращательные степени свободы.

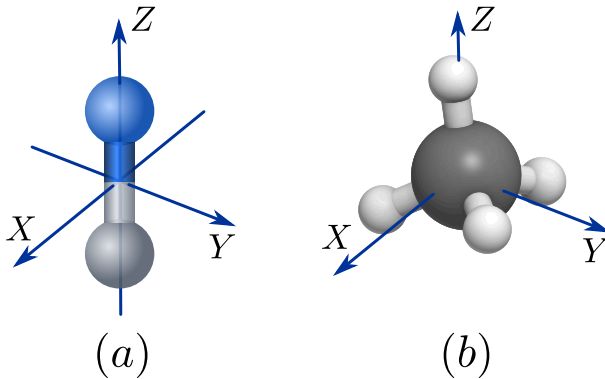


Рис. 1. Степени свободы молекул различной конфигурации

Нелинейные молекулы, состоящие из трех и более атомов, в пренебрежении изменением длин химических связей и валентных углов, имеют шесть степеней свободы - три поступательные и три вращательные.

Для произвольного количества идеального газа его внутренняя энергия представляет собой сумму энергий движения всех составляющих его молекул и определяется только температурой:

$$U(T) = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} N k T = \frac{i}{2} \nu R T. \quad (3)$$

Используя (1) из (3) можно получить соотношение $U = \frac{i}{2}PV$ для оценки значения внутренней энергии идеального газа при нормальных условиях (давление $P_0 = 10^5$ Па): один кубический метр воздуха содержит в себе энергию порядка 0,25 МДж!

Внутренняя энергия термодинамической системы может изменяться за счет двух различных процессов: совершения над телом работы A' сторонними силами и сообщения ему количества тепла Q . Следует понимать, что макроскопическая работа и количество тепла — это не формы энергии, а только различные способы её изменения и передачи от одного тела к другому. Содержание данного утверждения является **первым началом термодинамики**:

$$\Delta U = Q + A'. \quad (4)$$

Если ввести в рассмотрение работу, совершенную самой термодинамической системой над внешними телами A , то на основании третьего закона Ньютона $A = -A'$. Тогда первое начало термодинамики может быть записано в виде:

$$Q = \Delta U + A. \quad (5)$$

Первое начало является фундаментальным постулатом термодинамики, выражающим собой закон сохранения энергии: количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.

Для бесконечно малого (элементарного) равновесного процесса уравнение (5) принимает вид:

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV. \quad (6)$$

Работа A не является функцией состояния системы, так как ее величина зависит от того, каким именно образом проходил процесс ее совершения, соответственно элементарная работа δA не является полным дифференциалом какой-либо функции параметров состояния. А значит, это же можно утверждать и в

отношении величин Q и δQ . Количество теплоты, полученное системой в каком-нибудь процессе, зависит не только от ее начального и конечного состояний, но и от способа перехода системы из одного состояния в другое. Величина Q не является функцией состояния системы, а элементарная теплота δQ не является полным дифференциалом. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, используется обозначение δQ , а не dQ .

Теплоемкость идеального газа

Как следует из практического опыта, для изменения температуры различных тел на одну и ту же величину необходимо сообщить (или получить от них) различное количество теплоты. Количественной характеристикой этого различия является физическая величина называемая теплоемкостью. Определим теплоемкость тела как отношение количества тепла, необходимое для увеличения температуры тела на один кельвин:

$$C_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT}, \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right]. \quad (7)$$

На практике часто пользуются понятиями удельной массовой и удельной молярной теплоемкостей вещества: удельной массовой теплоемкостью вещества называется физическая величина, равная количеству теплоты, которую необходимо передать единице массы вещества для увеличения её температуры на один кельвин:

$$C_m = \frac{\delta Q}{m dT}, \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right] \quad (8)$$

Аналогичным образом, удельной молярной теплоемкостью назовем физическую величину, равную количеству теплоты, необходимого для увеличения температуры на один кельвин одного моля вещества:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right] \quad (9)$$

Из определения понятия теплоемкости с учетом выражений первого закона термодинамики (5) для изобарического и изох-

рического процессов следует, что величина теплоемкости зависит от условий, при которых газ нагревался. Если при нагревании системы её объем остается постоянным $dV = 0$, теплоемкость системы называется изохорной и обозначается C_V и равна (для одного моля газа):

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT}. \quad (10)$$

С учетом выражения для внутренней энергии идеального газа (3) для изохорной молярной теплоемкости получаем:

$$C_V = \frac{i}{2}R. \quad (11)$$

Если нагревание проводилось при постоянном давлении, то величина теплоемкости будет больше, так одновременно с повышением температуры газ совершает работу:

$$C_P = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT} = C_V + \frac{\delta A}{dT}. \quad (12)$$

Для определения величины δA используем определение элементарной работы и уравнение состояния идеального газа (1):

$$\delta A = PdV = RdT. \quad (13)$$

Окончательное выражение для изобарной теплоемкости имеет вид:

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (14)$$

Отметим, что вне зависимости от структуры молекулы идеального газа (числа степеней ее свободы) разность между удельными молярными изобарной и изохорной теплоемкостями будет иметь постоянное значение равное универсальной газовой постоянной: $C_p - C_v = R$. Данное соотношение носит название *уравнения Майера*.

Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона

Одним из наиболее часто рассматриваемых термодинамических процессов является адиабатический (адиабатный). Это процесс, происходящий в некоторой макроскопической системе (в данной лабораторной работе это определенное количество воздуха), при которой отсутствует теплообмен с окружающей средой. Термин адиабатический (от др.-греч. *αδιαβατος* «непроходимый») означает, что система предполагается отделенной от внешнего пространства непроницаемой для теплоты оболочкой.

Рассмотрим адиабатический процесс с точки зрения первого начала термодинамики, которое в случае $\delta Q = 0$ принимает вид:

$$dU = -\delta A. \quad (15)$$

С учетом выражения для внутренней энергии (3) и определения элементарной работы $\delta A = PdV$ данное соотношение можно представить в виде:

$$C_V dT + PdV = 0. \quad (16)$$

Из уравнения состояния идеального газа (1) найдем дифференциал температуры и подставим его в (16):

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{R} (PdV + VdP) + PdV &= 0 \\ (C_V + R) PdV + C_V VdP &= 0. \end{aligned}$$

В последнем уравнении разделим обе части на PV и, используя уравнение Майера, запишем

$$C_P \frac{dV}{V} + C_V \frac{dP}{P} = 0. \quad (17)$$

Введем новый параметр

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}, \quad (18)$$

который назовем показателем адиабаты. Интегрируя и потенцируя выражение (17), получим уравнение адиабатического процесса в параметрах $\{P; V\}$:

$$PV^\gamma = \text{Const.} \quad (19)$$

Соотношение (19) называется *уравнением Пуассона*. График зависимости $P = P(V)$ представлен на рис.2 красной линией.

Для на этом же рисунке синим цветом приведены графики двух изотермических процессов, происходящих при различных температурах $T_2 > T_1$. Как следует из определения показателя адиабаты (18) $\gamma > 1$, а это значит, что скорость изменения давления в адиабатическом процессе будет для любого выбранного значения объема больше, чем для процесса происходящего при постоянной температуре $PV = \text{Const}$. То есть, в частности при расширении газа, график адиабаты будет пересекать изотермы, более быстро стремясь к нулю - следовательно газ при адиабатическом расширении охлаждается (а при сжатии - нагревается). Данное поведение также непосредственно следует из первого начала термодинамики: в адиабатическом процессе газ производит работу за счет изменения своей внутренней энергии, и если эта работа положительна $\Delta V > 0$, то изменение внутренней энергии и температуры газа отрицательно $\Delta T < 0$.

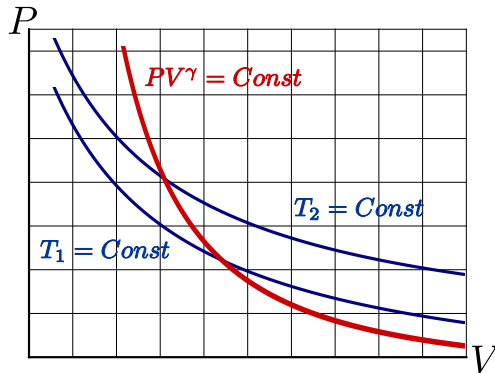


Рис. 2. Графики адиабатического и изотермических процессов

Лабораторная установка

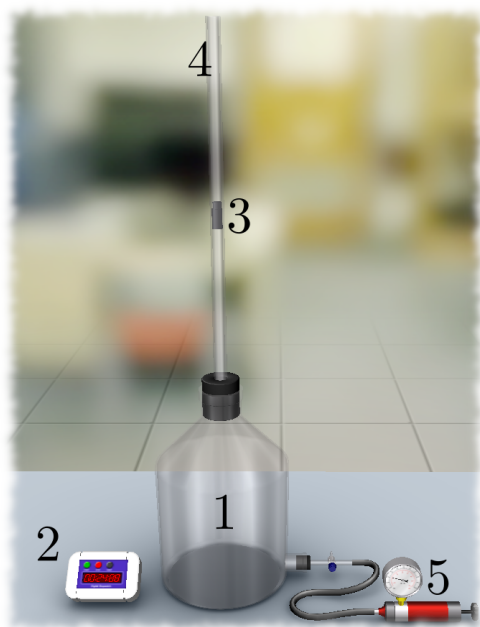


Рис. 3. Используемое оборудование: бутылка Мариотта (1), цифровой хронометр (2), алюминиевый поршень (3), стеклянная трубка (4), насос с манометром (5)

В данной лабораторной работе показатель адиабаты γ воздуха определяется по периоду колебаний алюминиевого поршня внутри стеклянной трубки, выходящей из верхней части объемного стеклянного сосуда - бутылки Мариотта. Поршень плотно прилегает к стенкам трубки и образует воздухонепроницаемое уплотнение. Выведение поршня из его положения равновесия вызывает расширение или сжатие воздуха внутри трубки, что приводит к тому, что давление под поршнем становится выше или ниже атмосферного давления, которое стремится вернуть поршень в его положение равновесия. Эта возвращающая сила пропорциональ-

на отклонении из положения равновесия, то есть поршень будет совершать простые гармонические колебания. Поскольку теплообмен с окружающей средой за время одного периода колебаний пренебрежимо мал, можно считать происходящий процесс адиабатическим и происходящим в соответствии с уравнением Пуассона (19).

В положении равновесия давление P внутри сосуда уравнивается атмосферным давлением P_0 и давлением поршня, которое равно $P_{\text{п}} = \frac{mg}{S}$, где m - масса поршня, g - ускорение свободного падения, S - площадь поперечного сечения трубки, т.е.

$$P = P_0 + P_{\text{п}} = P_0 + \frac{mg}{S}. \quad (20)$$

При смещении поршня из положения равновесия на расстояние Δx на него действует возвращающая сила $F = -\Delta PS$, где ΔP - изменение давления газа под поршнем.

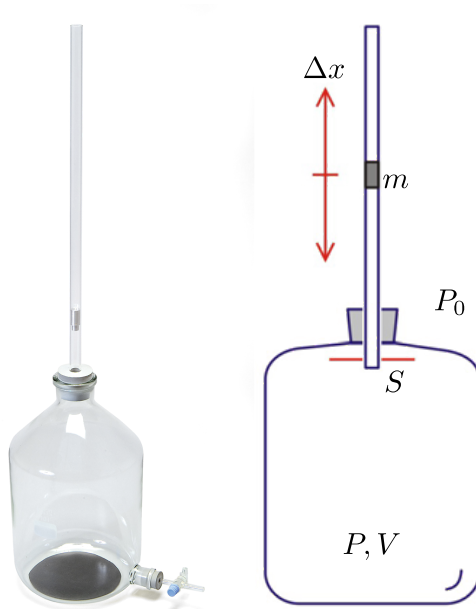


РИС. 4. Схема установки

Поскольку процесс адиабатический, то ΔP найдём, используя уравнение (17) которое, считая что изменения давления и объема можно считать малыми по сравнению с их равновесными значениями и учитывая, что $\Delta V = x \cdot S$, имеет вид:

$$\Delta P = -\gamma \cdot \frac{P}{V} \cdot S \cdot x. \quad (21)$$

Тогда уравнение движения поршня (II закон Ньютона) будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{PS^2}{V} \cdot x. \quad (22)$$

Решением дифференциального уравнения (22) является простая гармоническая функция вида $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma \frac{PS^2}{mV}} \quad (23)$$

и периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma PS^2}}. \quad (24)$$

Величины амплитуды колебаний x_0 и начальной фазы φ_0 определяются из начальных условий.

Отметим, что в реальности на поршень помимо возвращающей силы действует сила трения, величина которой в первом приближении может считаться пропорциональной скорости поршня $\vec{F}_{\text{тр}} = -\Gamma \vec{v}$. При этом уравнение движения видоизменяется и становится более сложным:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0, \quad (25)$$

где $\beta = \frac{\Gamma}{2m}$ - коэффициент затухания колебаний. Решение динамического уравнения с учетом сил трения будет иметь вид:

$$x(t) = x_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi), \quad (26)$$

в котором частота будет отличаться от ω_0 в меньшую сторону:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (27)$$

Но в условиях реализованных в данной виртуальной лабораторной работе величина коэффициента затухания может считаться пренебрежимо малой (доли процента) и для расчета периода колебаний можно использовать формулу (24).

Вышеописанный способ определения показателя адиабаты впервые был предложен германским ученым Эдуардом Рюхардом (*Eduard Rüchardt*) в статье «Eine einfache methode zur bestimmung von C_P/C_V » опубликованной в 1929 году в журнале «Physikalische Zeitschrift» и носит его имя.

Проведение измерений

1. Запустите виртуальную лабораторную установку. Доступ к ней откроется после успешного выполнения теста допуска.
2. С помощью кнопок $[+]$ $[-]$ установите значение массы поршня $m = 12$ г, объём бутылки Мариотта $V_1 = 8$ л, диаметр трубки любым в доступном диапазоне $D = 1,2 \div 1,8$ см, внешнее давление P_0 установите максимально близким к фактическому атмосферному давлению для времени и локации проведения измерений (для определения значения атмосферного давления можно воспользоваться любым метеорологическим онлайн-сервисом, например, <https://www.windy.com>). Запишите время и место проведения измерений в Таблицу 1 (см. Приложение).
3. Отпустите алюминиевый поршень в свободное падение внутри стеклянной трубки, нажав кнопку «Пуск» $[\blacktriangleright]$ и измерьте цифровым секундомером время t_5 пяти полных колебаний поршня (для этого удобно пользоваться кнопкой «Пауза»). Рассчитайте период колебаний как $T_1 = \frac{t_5}{5}$. Запишите T_1 в Таблицу 1.
4. Нажмите кнопку «Стоп» $[\blacksquare]$, чтобы вернуть поршень в верхнее положение.
5. Проведите аналогичные измерения ещё два раза, запишите значения T_2 и T_3 в таблицу.
6. Повторите пункты 3-5 для различной массы поршня с шагом $\Delta m = 2$ г.
7. Проведите циклы аналогичных измерений при объемах $V_2 = 10$ л и $V_3 = 12$ л.

Обработка результатов

1. Найдите среднее значение периода колебаний поршня по результатам прямых измерений $\langle T \rangle = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)$ и квадрата циклической частоты $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{\langle T \rangle^2}$ для каждой строки в таблице.
2. Рассчитайте площадь поперечного сечения трубки: $S = \pi D^2/4$, где D — диаметр трубки.

3. Определите дополнительное давление, создаваемое поршнем для каждого значения его массы: $P_{\text{п}} = \frac{mg}{S}$, где $g = 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения. Рассчитайте равновесное давление, как сумму: $P = P_0 + P_{\text{п}}$. Внесите полученные величины в таблицу.
4. Найдите все значения параметра $\frac{PS^2}{mV}$ для каждой строки в рабочей таблице. Постройте три графика зависимостей $\omega^2 = \omega^2 \left(\frac{PS^2}{mV} \right)$ для всех значений объема бутылки Мариотта. Визуально удостоверьтесь в линейном поведении данных графиков.
5. С помощью любого стандартного метода нахождения параметров линейных зависимостей (например, МНК) найдите угловые коэффициенты полученных графиков и погрешность их определения: $\gamma_i \pm \Delta\gamma_i$, где $i = 1, 2, 3$.
6. В качестве окончательного результата для оценки γ следует принять среднее арифметическое по трем выполненным сериям измерений $\langle \gamma \rangle = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{3}$. Погрешность окончательного результата может быть определена по формуле:

$$\Delta\gamma = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \Delta\gamma_i^2}. \quad (28)$$

7. Представьте окончательный результат в стандартной форме в отчете. Сравните полученное значение показателя адиабаты с табличным. Сформулируйте и запишите выводы по лабораторной работе.

Приложение

Таблица 1: Результаты прямых измерений и их обработка

Атм. давление $P_0 = \dots \text{Па}$				Город :			
Диаметр поршня $D = \dots \text{см}$				Дата :			
Площадь $S = \dots \text{м}^2$				Время (MSK) :			
$V_1 = 8 \text{ л}$							
$m, \text{г}$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$\langle T \rangle, \text{с}$	$P, \text{Па}$	$\frac{PS^2}{mV}, \text{с}^{-2}$	$\omega^2, \text{с}^{-2}$
12							
14							
16							
18							
20							
$V_2 = 10 \text{ л}$							
12							
14							
16							
18							
20							
$V_3 = 12 \text{ л}$							
12							
14							
16							
18							
20							