Лекция 2

Кинематика материальной точки

Музыченко Яна Борисовна

muzychenko@itmo.ru

План лекции

- Способы описания движения
- Основные понятия кинематики
- Кинематика поступательного и вращательного движения
- Прямая и обратная задача кинематики
- Численные методы решения физических задач

Всегда ли меняется скорость если есть ускорение?

Как связаны между собой поступательные и вращательные величины?

Почему нет общепринятого названия у скорости изменения ускорения?

Как получать и обрабатывать информацию?

Основные понятия кинематики

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.

Траектория – линия, по которой движется материальная точка в пространстве

Путь – длина траектории

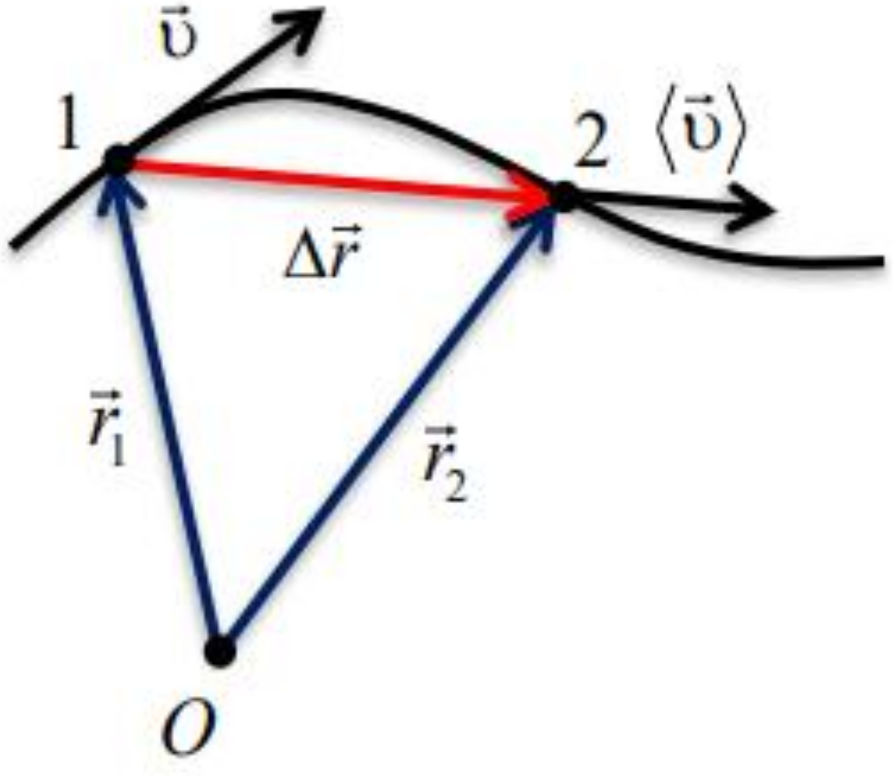
Перемещение – вектор, проведенный из начальной точки в конечную.

19

Способы описания движения

Векторный способ	Координатный способ	Естественный (траекторный) способ
Положение точки может быть однозначно определено с помощью радиус-вектора	Положение точки может быть однозначно определено с помощью трех скалярных координат	Положение точки определяется дуговой координатой

Способы описания движения



$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радиус-векторы, определяющие положения материальной точки в 1 и 2.

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - перемещение материальной точки

Скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки

Средняя скорость

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Средняя путевая скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

СИ: $[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Векторный способ

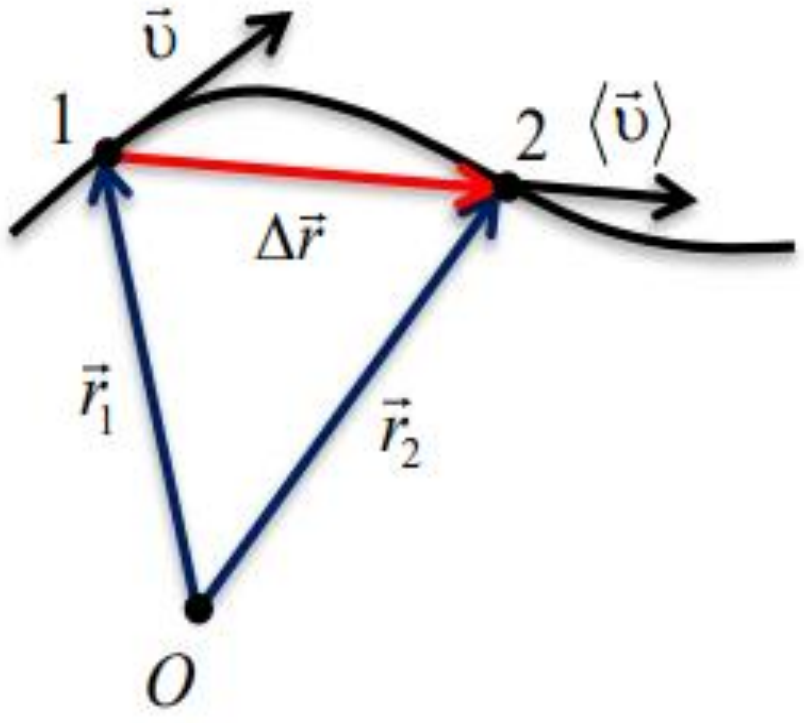
Ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости материальной точки

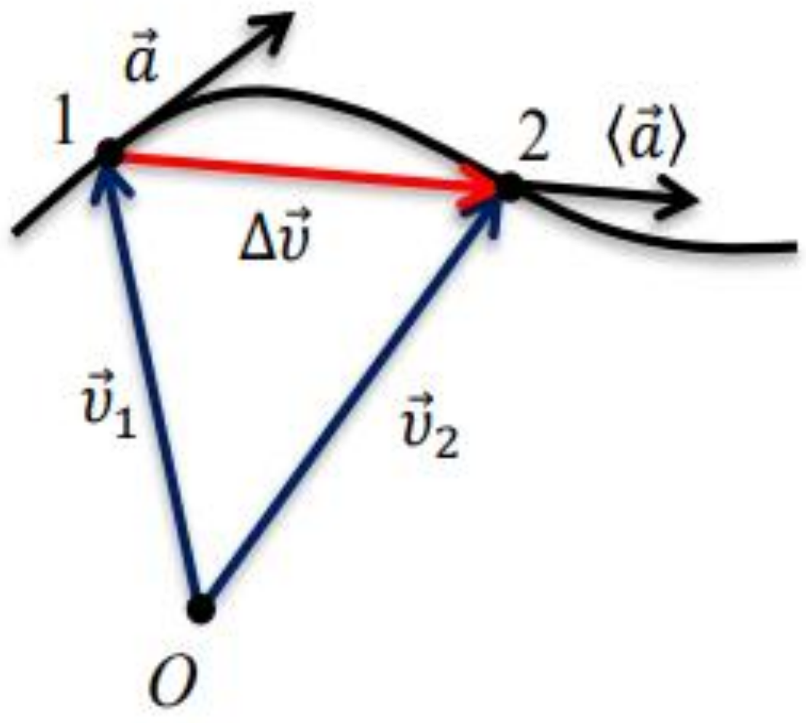
Среднее ускорение

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



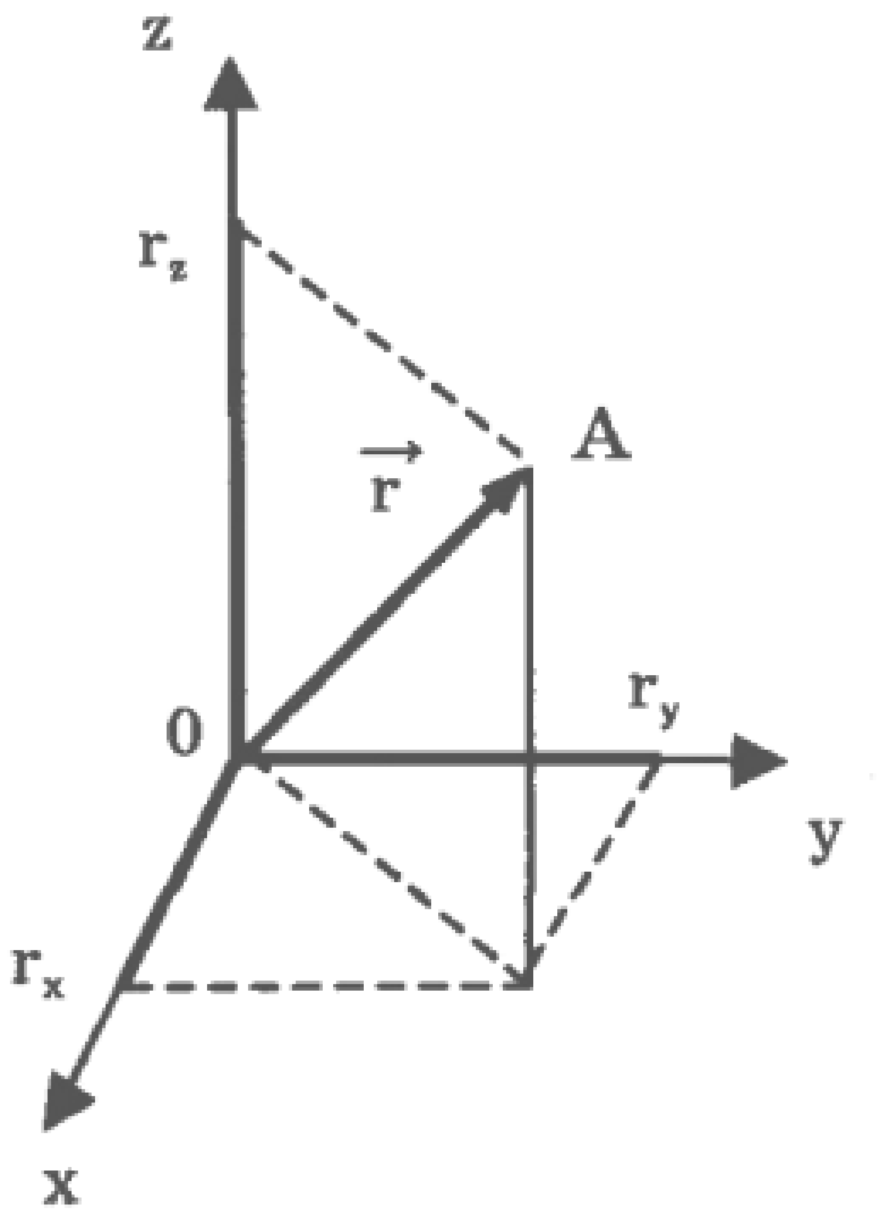


Аналогии:

Ускорение – скорость
Вектор скорости – радиус-вектор
Траектория – годограф скорости

СИ: $[a] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Координатный способ



$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{\imath} + r_y(t)\vec{\jmath} + r_z(t)\vec{k} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Скорость материальной точки:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\vec{\imath} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\vec{\jmath} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение материальной точки:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\vec{\imath} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y}\vec{\jmath} + \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{a_z}\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath} + a_z(t)\vec{k}}$$

Задачи кинематики

ИТМО НОВЫЙ ФИЗТЕХ

Прямая задача:

$\vec{r}(t)$	$\vec{v}(t)\ \vec{a}(t)$
$x(t), y(t), z(t)$	$v_y\ v_y\ v_z$
	$a_y\ a_y\ a_z$

Решение: дифференциирование

Обратная задача:

$\vec{a}(t)$	$\vec{v}(t)\ \ \vec{r}(t)$
$a_y\ a_y\ a_z$	$x(t), y(t), z(t)$

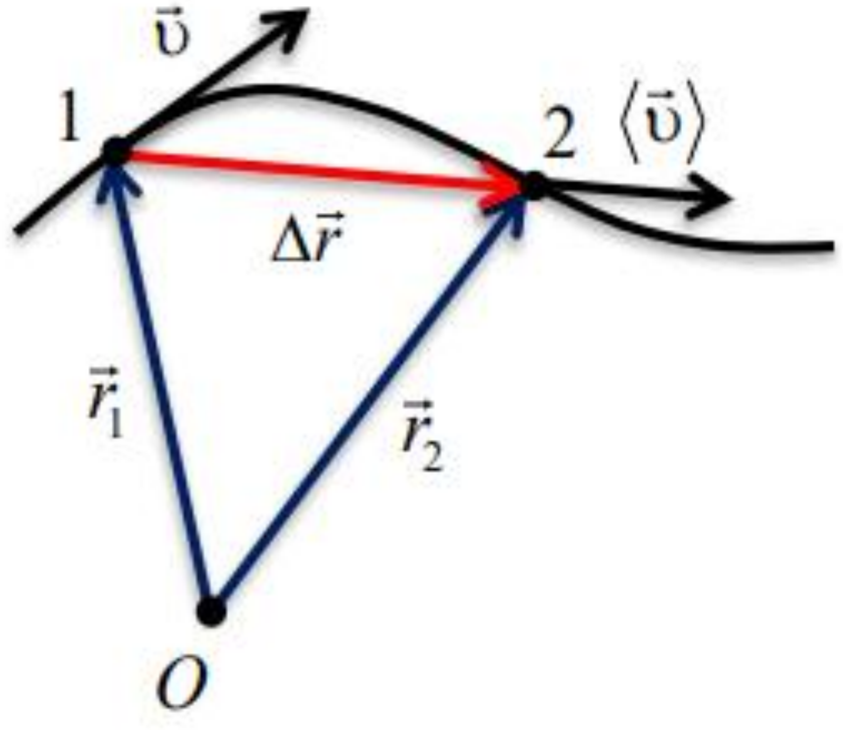
Решение: интегрирование

Обратная задачи кинематики

Для однозначного решения необходимо знать начальные условия.
Запишем взаимосвязь скорости и радиус-вектора:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad d\vec{r} = \vec{v}dt \qquad \Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt}$$

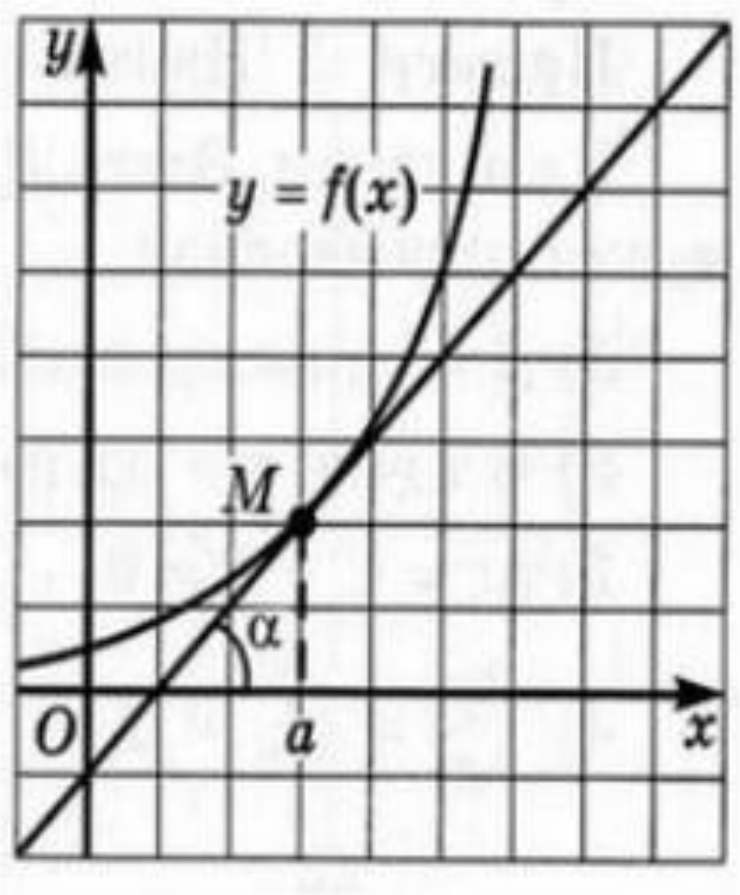


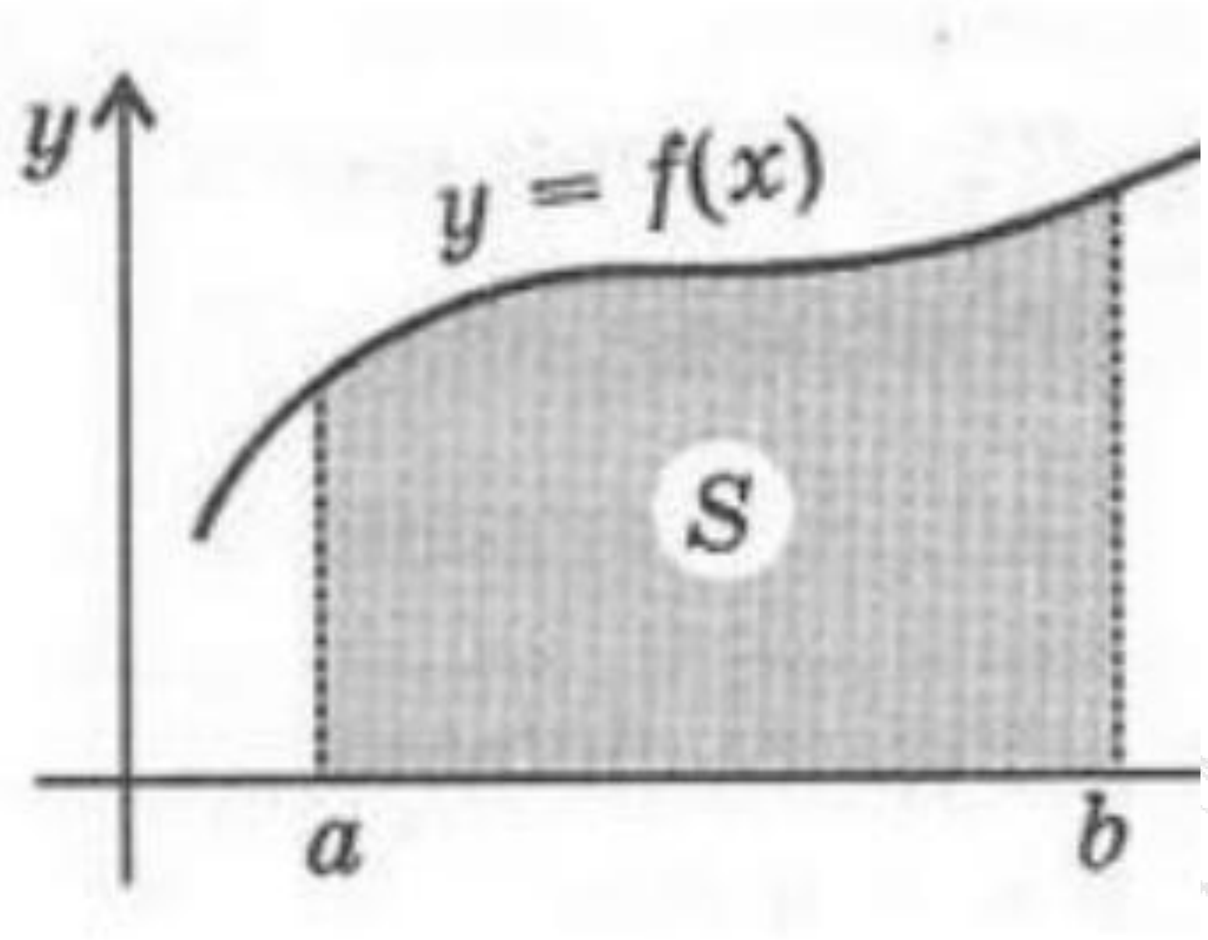
Ускорение:

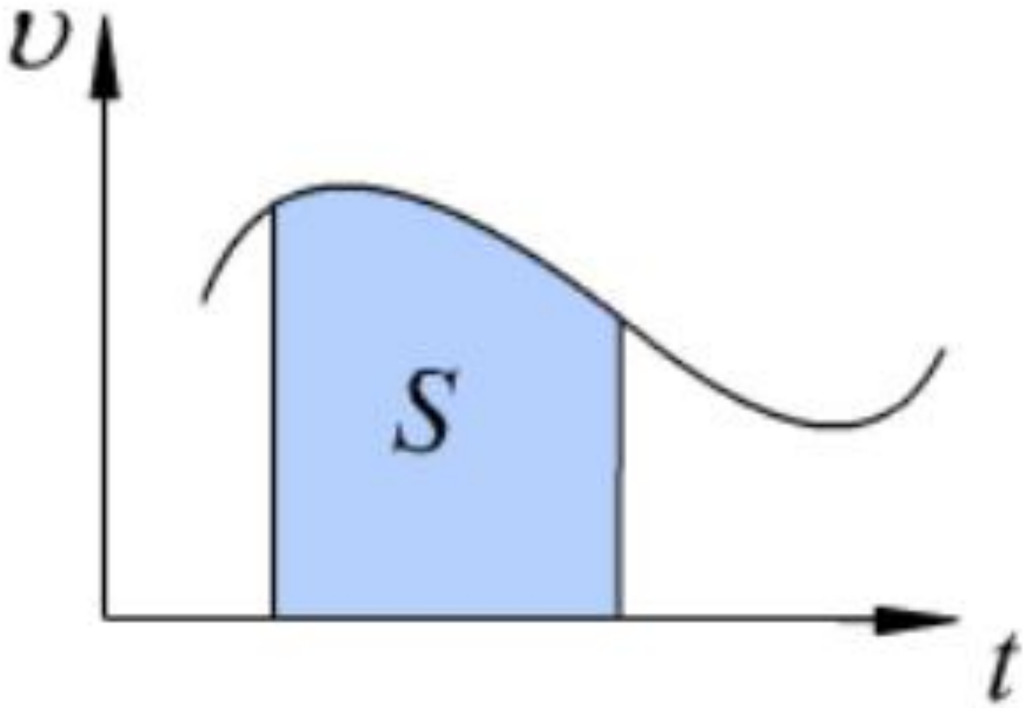
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad d\vec{v} = \vec{a}dt \qquad \Delta\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}dt$$

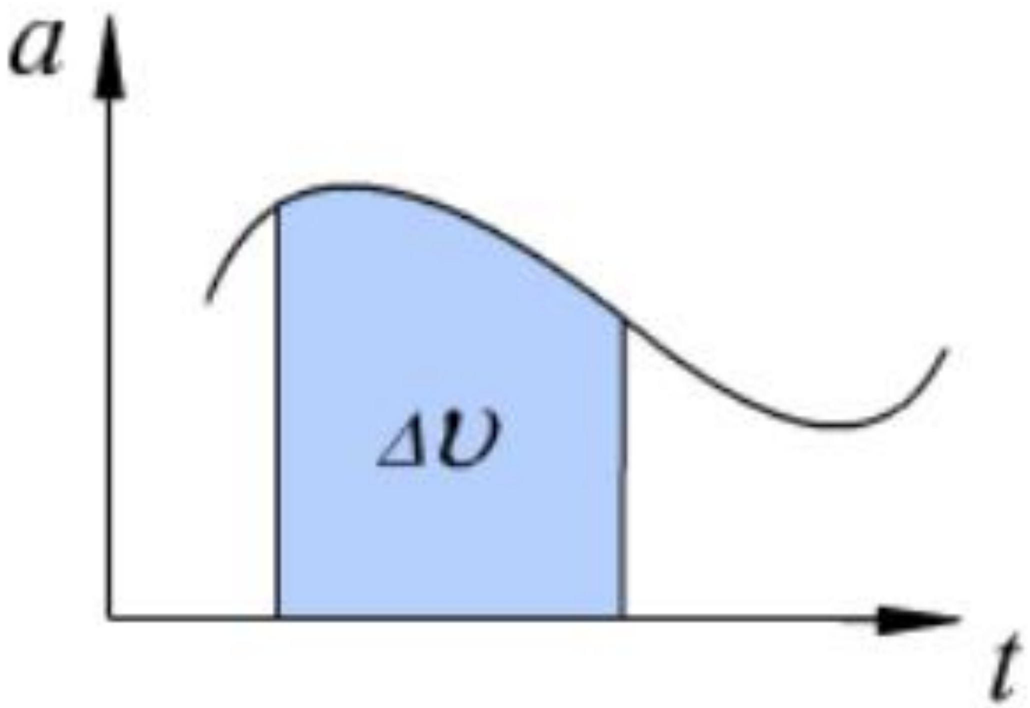
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}dt}$$

Способы описания движения







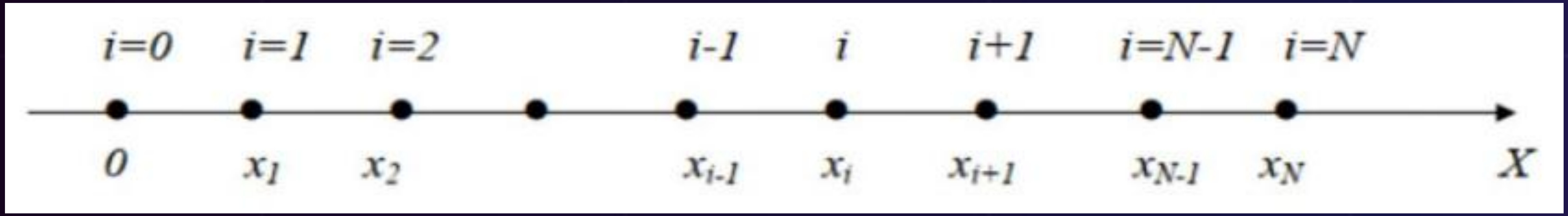


Численные методы

Численное решение ОДУ (обыкновенного дифференциального уравнения):

решение ОДУ $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)}$ на отрезке $[x_0, x_n]$ при условии $y(x_0) = y_0$.

Разбиваем отрезок $[x_0, x_n]$ на конечное число частей введением узловых точек:



Шаг разбиения:

$$h = \frac{x_N - x_0}{N}$$

По определению производной:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}}$$

Формула Эйлера:

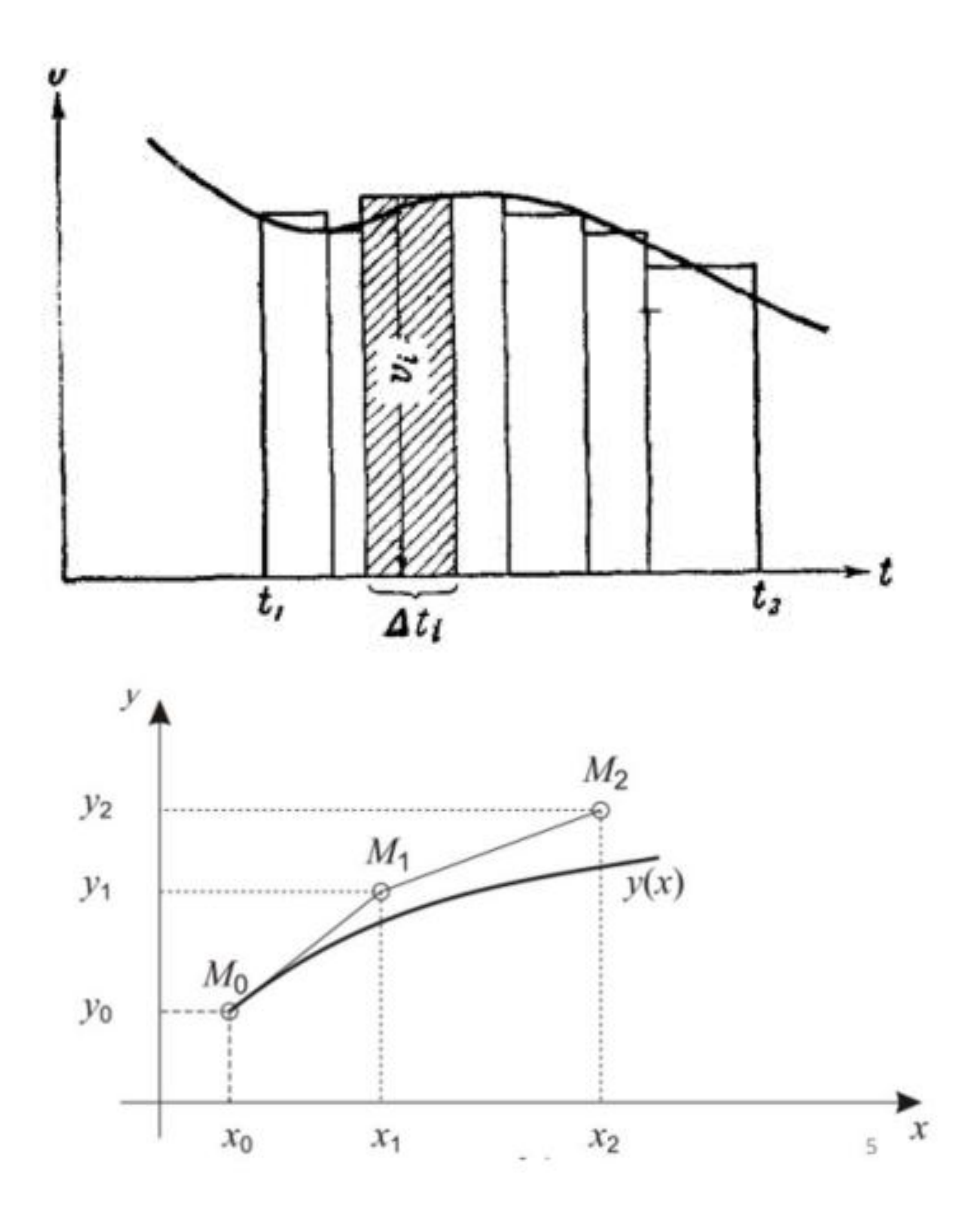
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Численные методы

ИТМО
НОВЫЙ ФИЗТЕХ

$$dy = f(x,y)dx$$

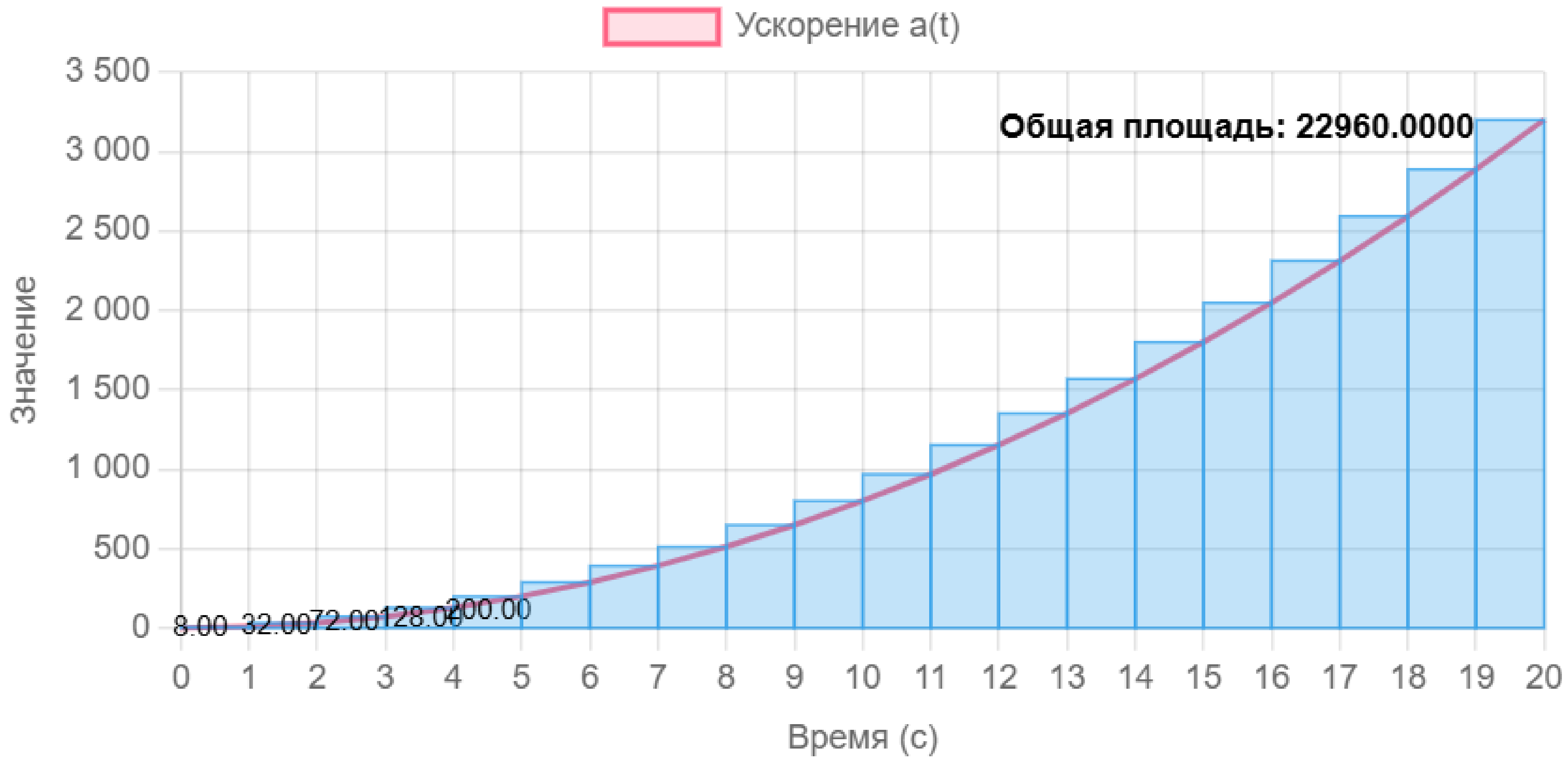
$$\Delta y = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$$

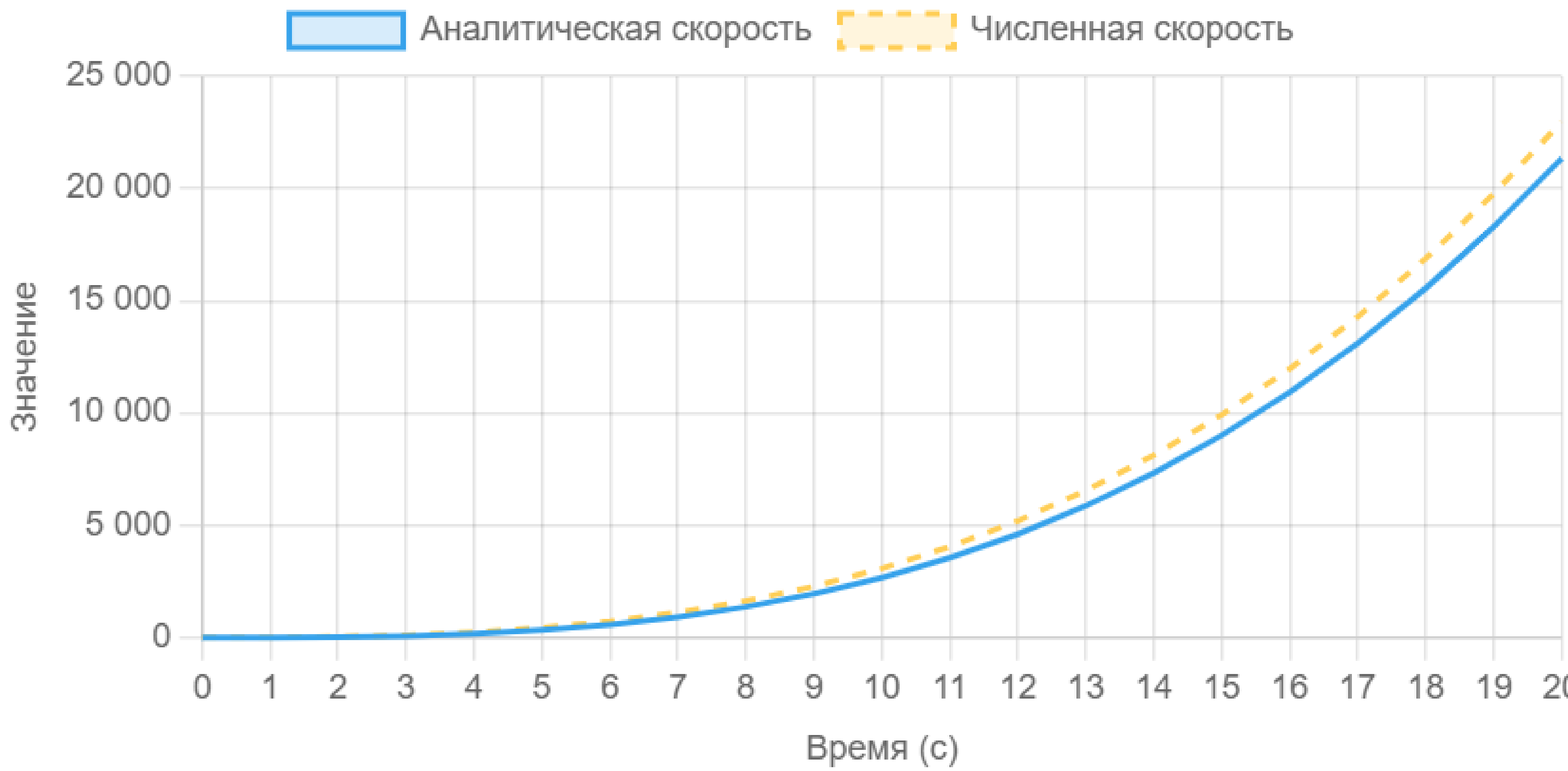


Интеграл – площадь под графиком функции $f(x,y)$. Естественным, но не единственным путем численного решения является замена интеграла прямоугольниками, высота которых определяется значением функции $f(x_i, y_i)$ на левой границе или квадратурной формулой численного интегрирования левых прямоугольников первого порядка.

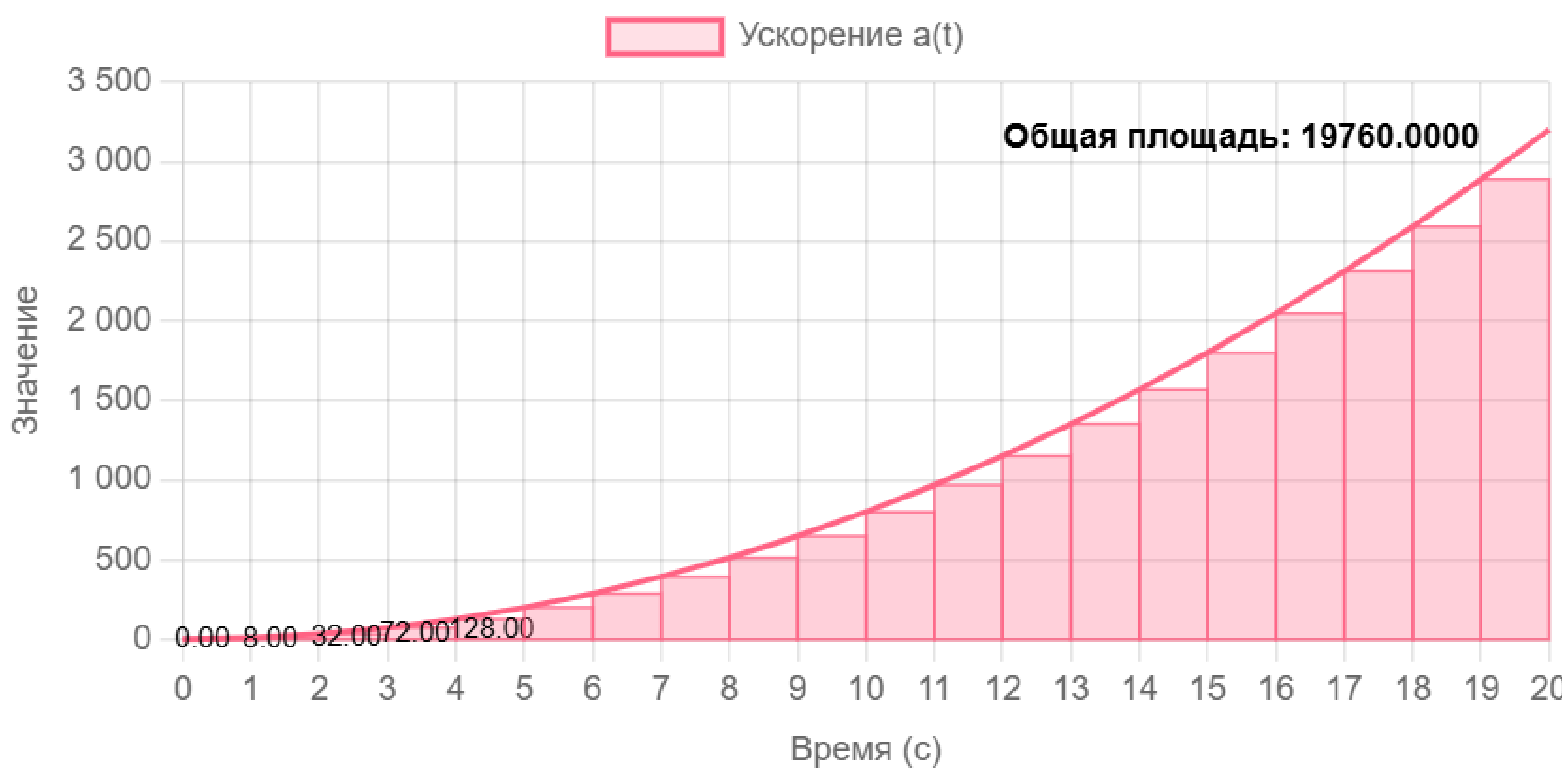
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

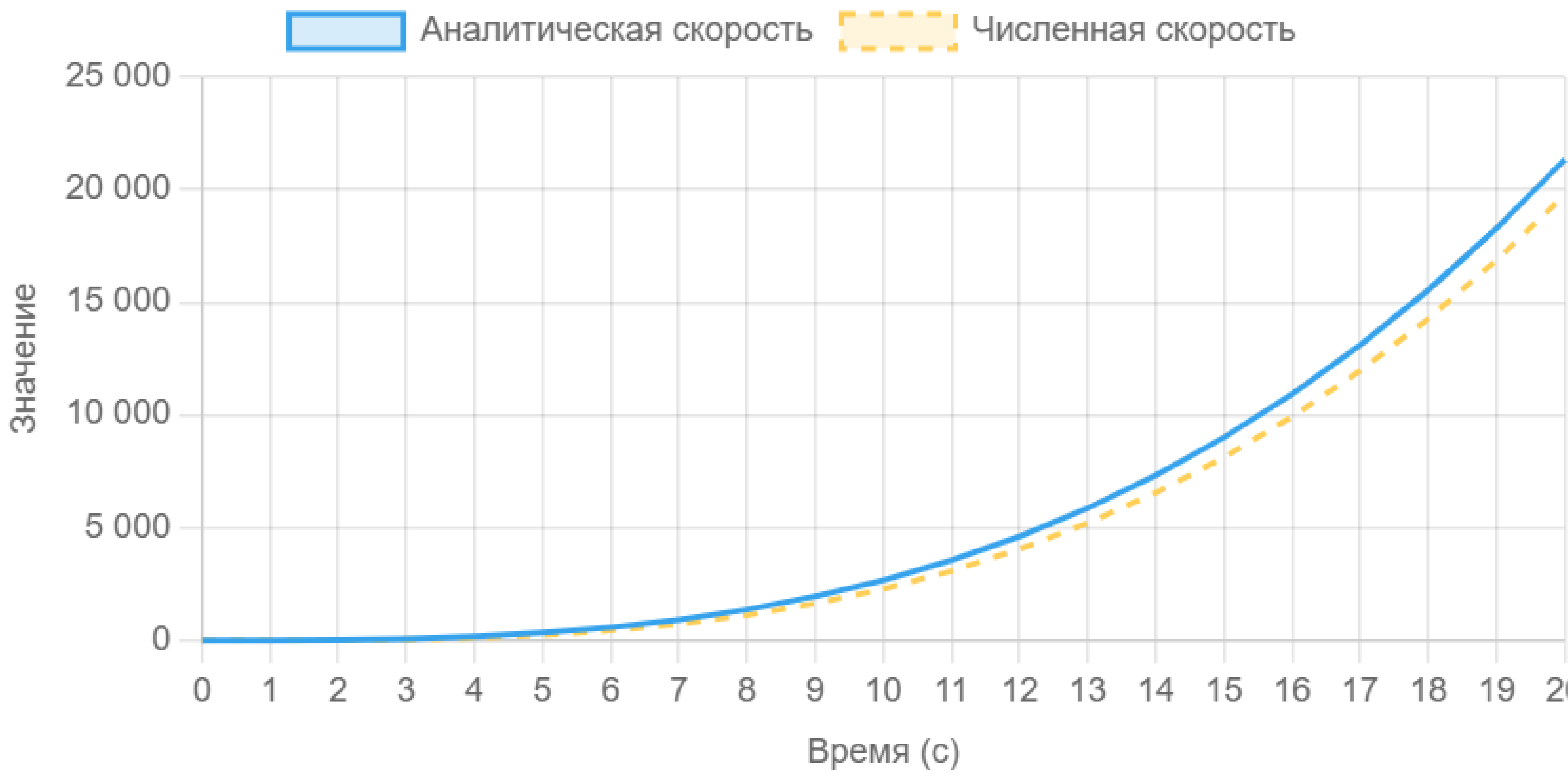
Численные методы



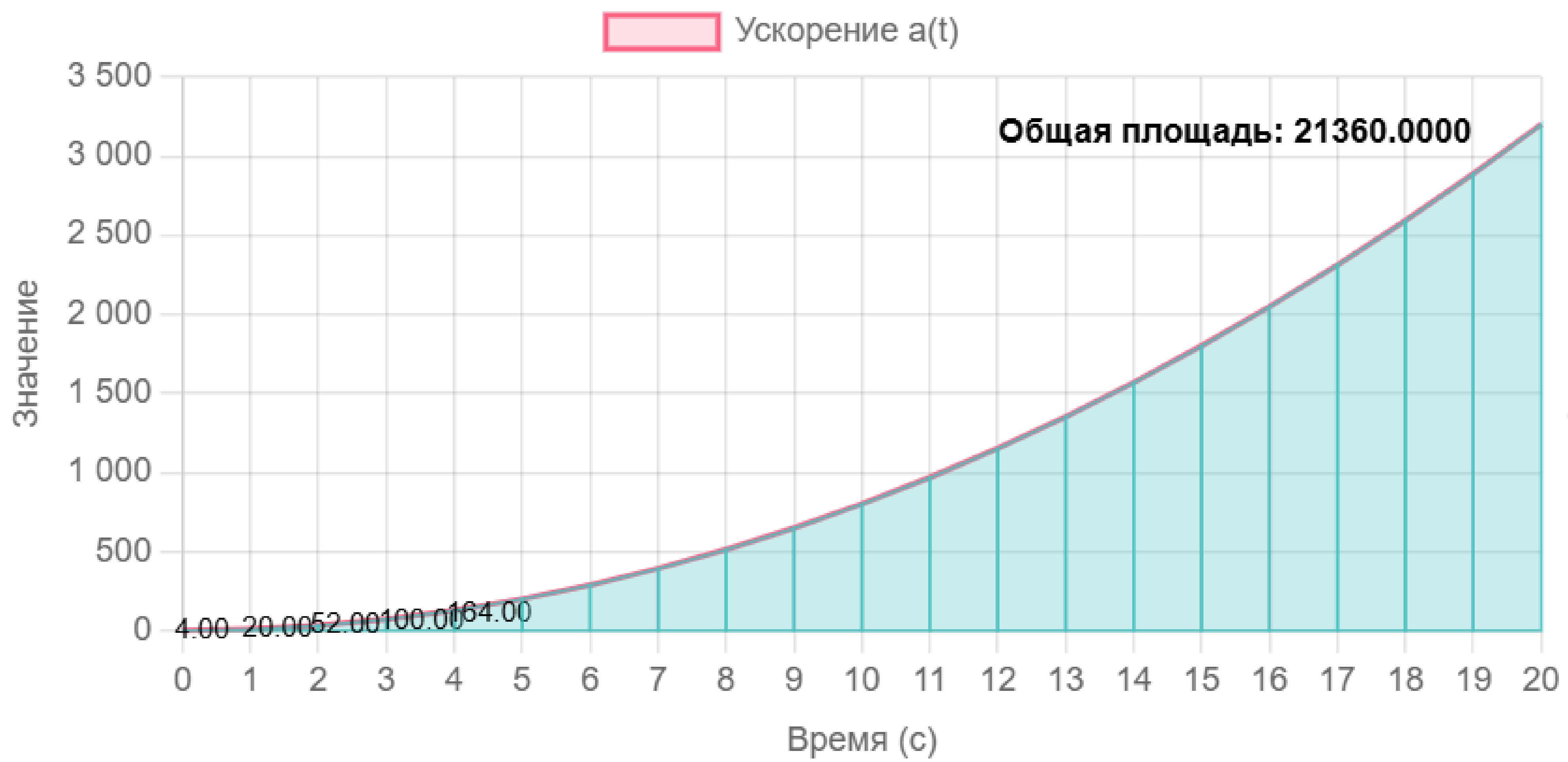


Численные методы





Численные методы



Как использовать численные методы?

Выбор шага:

1) шаг интегрирования h должен быть много меньше размеров системы
2) 2) относительная погрешность должна быть меньше 5%.

Относительная погрешность:

Для выбранного значения шага h на выбранном тестовом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ищем $y_{i+1}(h)$, затем уменьшаем шаг в два раза h/2 и находим уточненное значение на том же отрезке $y_{i+1}(h/2)$.
При устойчивом процессе чем меньше шаг, тем ближе мы подходим к истинному (ананлитическому) решению, т.е. решения разностных уравнений для шагов интегрирования h и h/2 будут сближаться. Относительную погрешность можно оценить как:

$$\frac{|y_{i+1}(h/2) - y_{i+1}(h)|}{|y_{i+1}(h/2)|} < \varepsilon$$

Где ε - наперед заданная точность (например, 5%). Если левая часть удовлетворяет неравенству, то считаем, что выбранный шаг можно использовать для интегрирования уравнения.

Как использовать численные методы?

Пример. Ускорение материальной точки меняется согласно следующему закону $a(t) = 8t^2$ м/с². Найти скорость материальной точки через 2 с после начала движения. Использовать аналитические и численные методы.

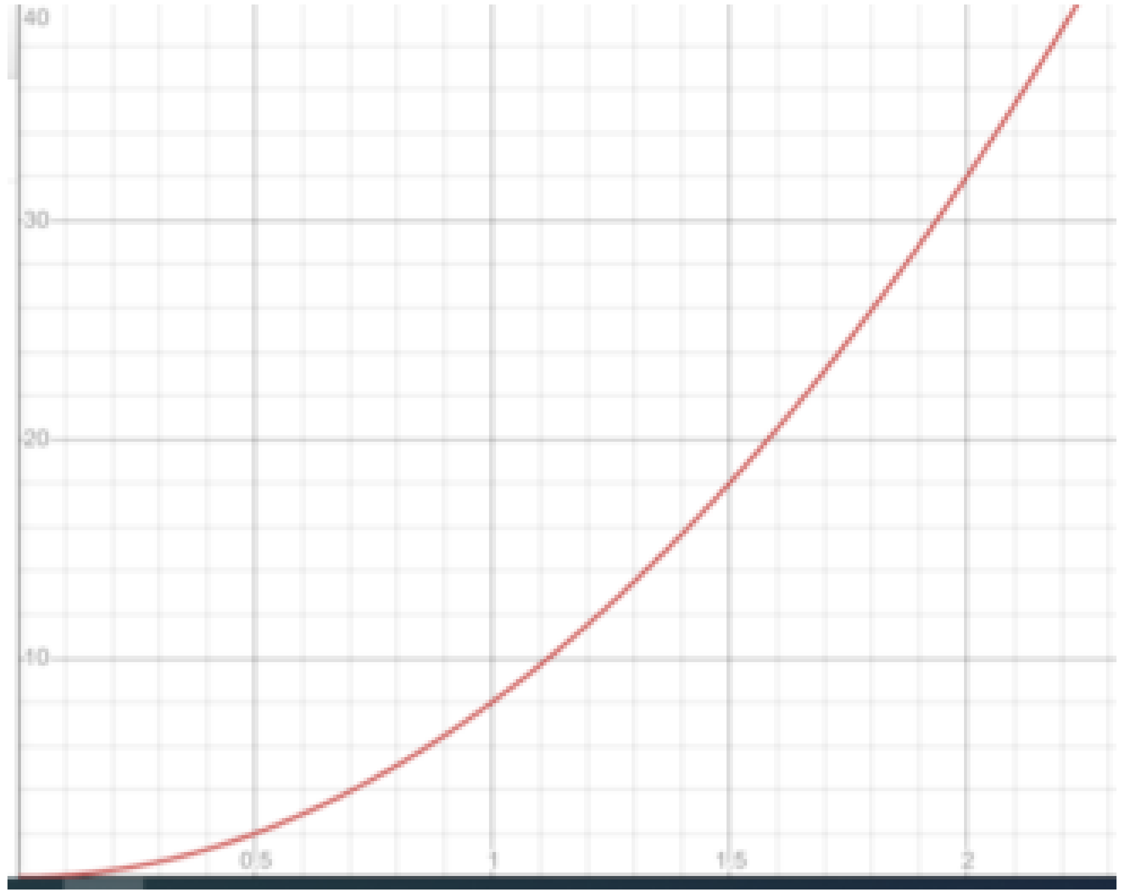
Метод левых прямоугольников (h=0,5 с):

t (с)	0	0,5	1	1,5
a (м/с2)	0	2	8	18

Метод левых прямоугольников (h=0,25 с):

t (с)	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
a (м/с2)	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5

17,5 м/с



ε = 20%

Как использовать численные методы?

ИТМО НОВЫЙ ФИЗТЕХ

Пример. Ускорение материальной точки меняется согласно следующему закону $a(t) = 8t^2$ м/с². Найти скорость материальной точки через 2 с после начала движения. Использовать аналитические и численные методы.

Метод левых прямоугольников (h=0,125 с):

t (c)	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875
a (м/c2)	0	0,125	0,5	1,125	2	3,125	4,5	6,125	8	10,125	12,5	15,125	18	21,125	24,5	28,125

19,375 м/с

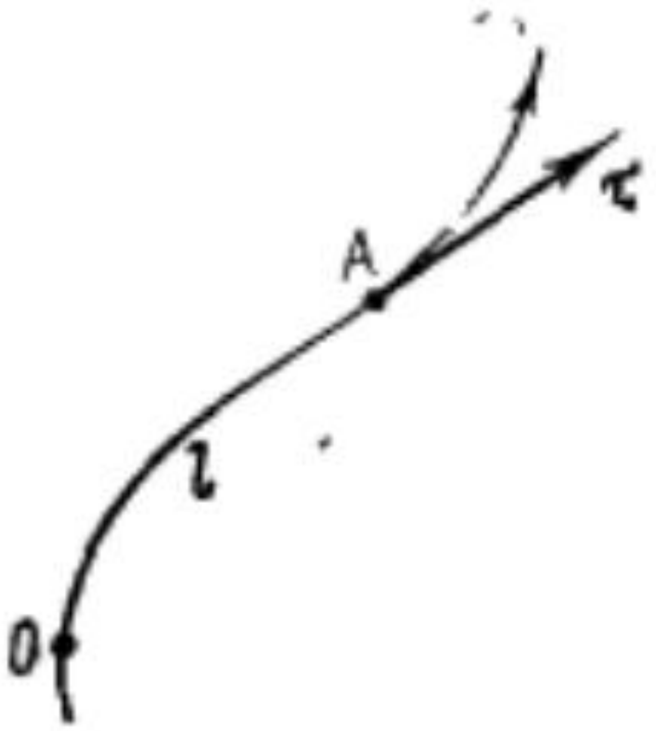
ε = 9,6%

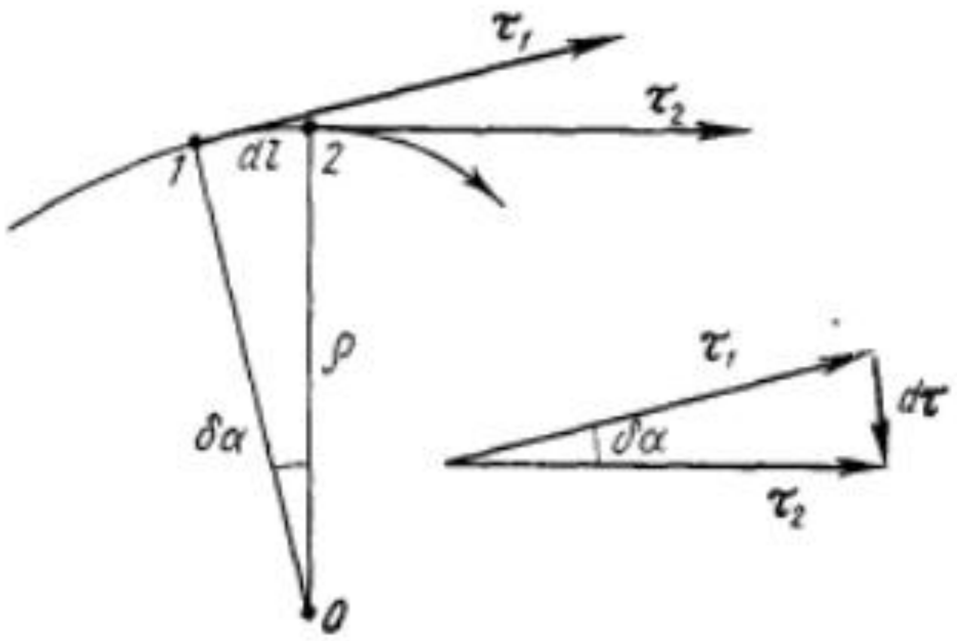
Метод левых прямоугольников (h=0,0625 с):

$$v = 20{,}283\ \text{м/с}$$

ε = 4,4%

Естественный способ





Траектория точки заранее известна, положение точки задается дуговой координатой *l(t)*.

Скорость:

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \qquad v_\tau = \frac{dl}{dt} \qquad |\vec{\tau}| = 1$$

Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v_\tau \qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = \frac{d\tau}{dl}v_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dl}v_\tau^2$$

Естественный способ

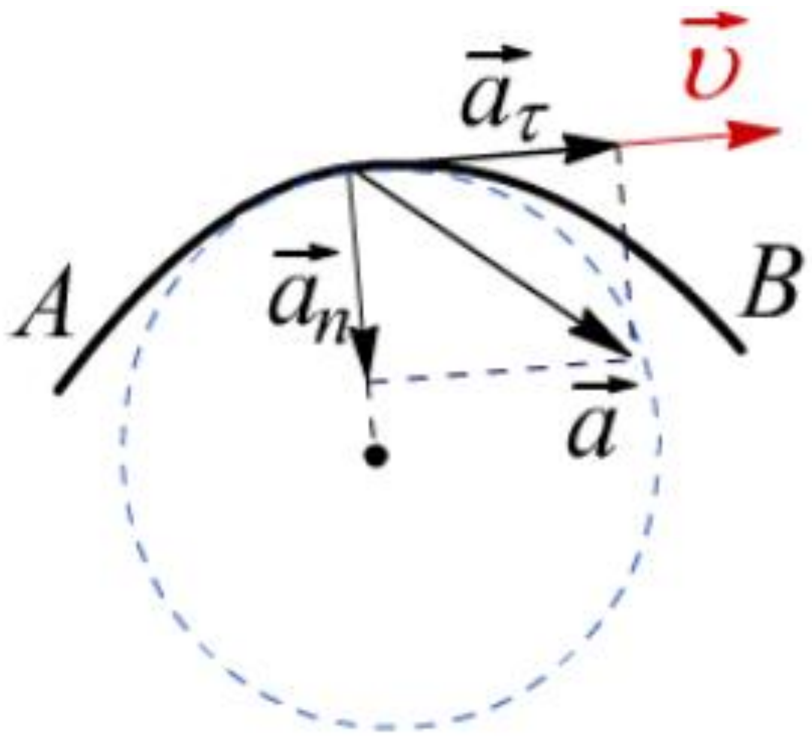
$$d\tau = \tau d\alpha$$

$$dl = R d\alpha \qquad d\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{n}$$

R – радиус кривизны траектории

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{1}{R}v_\tau^2\vec{n}$$

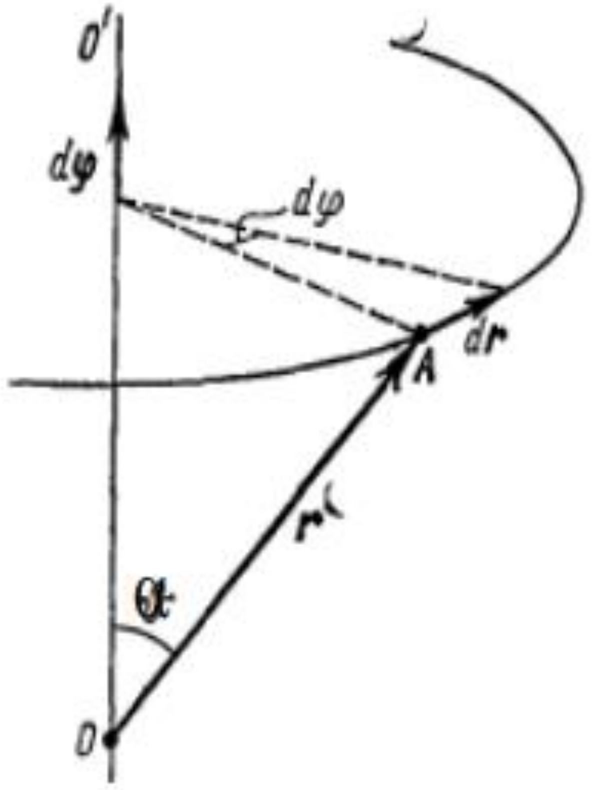
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



Тангенциальное ускорение отвечает за изменение **модуля** скорости, направлено по касательной к траектории движения.

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления **вектора** скорости, направлено к центру кривизны траектории.

Вращение вокруг неподвижной оси



OO' – неподвижная ось

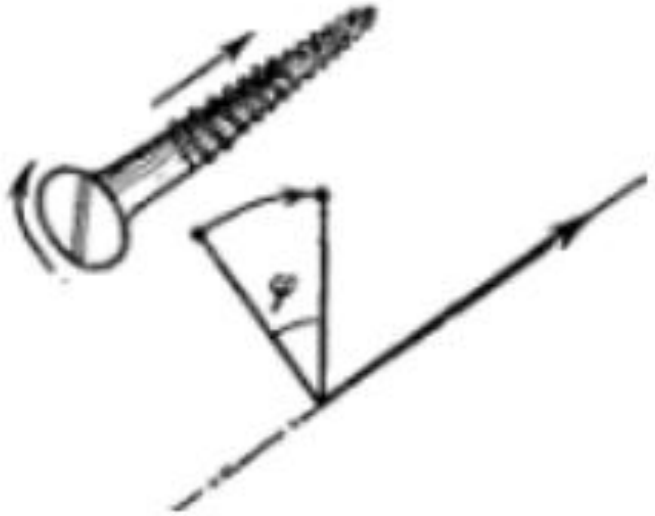
$\vec{r}$ – радиус-вектор точки А

$d\vec{r}$ – перемещение

$d\vec{\varphi}$– элементарный угол поворота (направление определяется по правилу правого винта - буравчика)

$$|d\vec{r}| = Rd\varphi = r \cdot \sin\alpha \cdot d\varphi$$

$$R = r \cdot \sin\alpha$$



$$\boxed{d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\ \vec{r}]}$$

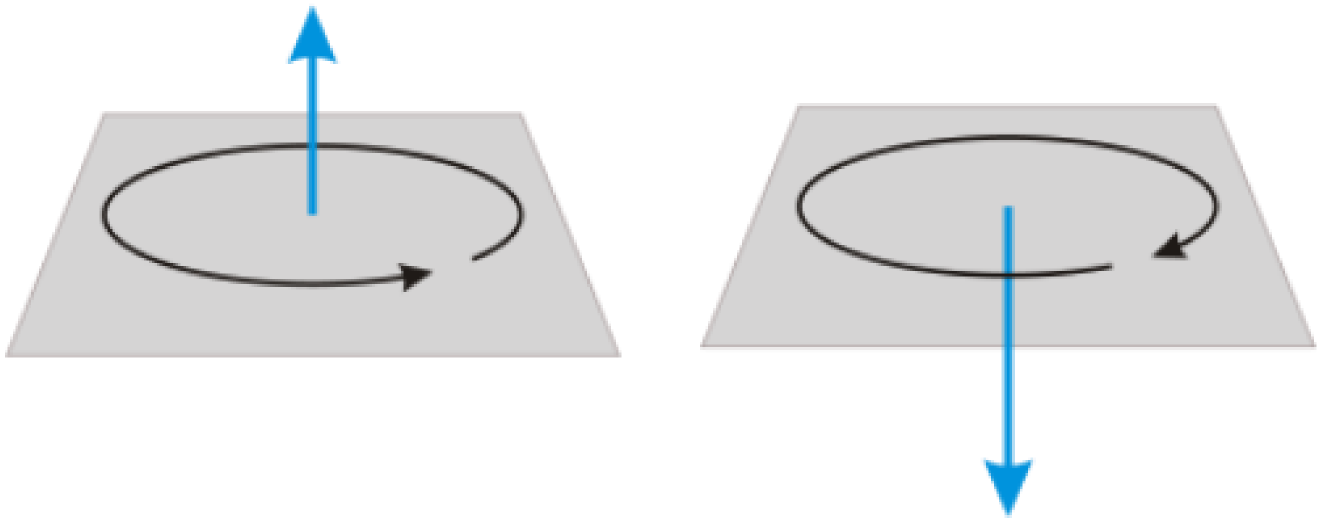
Способы описания движения

- векторная величина, показывающая как меняется угол поворота тела со временем

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$$



Спасибо за внимание!