Лекция 2. Кинематика материальной точки

План лекции

- Способы описания движения
- Основные понятия кинематики
- Кинематика поступательного и вращательного движения
- Прямая и обратная задача кинематики
- Численные методы решения физических задач

1.1 Основные понятия кинематики

Определение

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.

Определение

Траектория – линия, по которой движется материальная точка в пространстве.

Определение

Путь – длина траектории (скалярная величина).

Определение

Перемещение – вектор, проведенный из начальной точки в конечную.

1.2 Способы описания движения

Векторный способ

Положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$.

Координатный способ

Положение точки задается тремя координатами: $x(t), y(t), z(t)$.

Естественный (траекторный) способ

Положение точки определяется дуговой координатой $l(t)$ вдоль известной траектории.

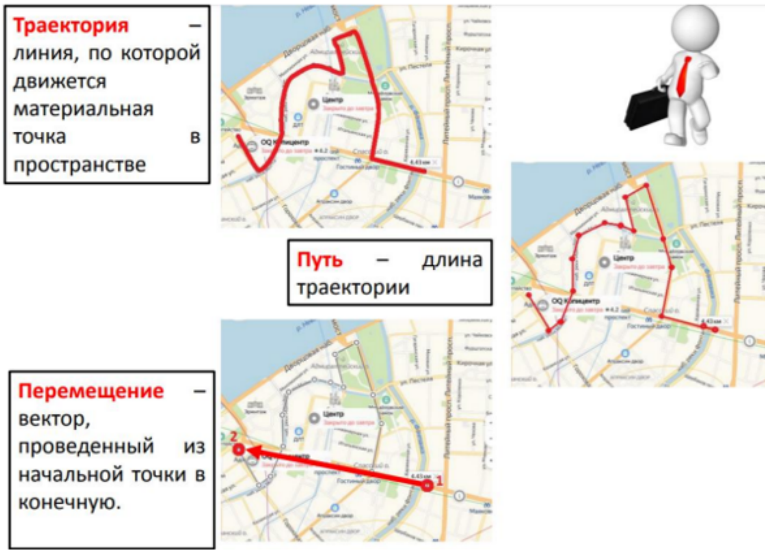

Рис. 1: Траектория, путь, перемещение.

1.3 Векторный способ

На рис. 4 показаны радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, определяющие положения материальной точки в моменты времени 1 и 2, и вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Для того, чтобы узнать как быстро меняется положение материальной точки вводится векторная физическая величина - скорость.

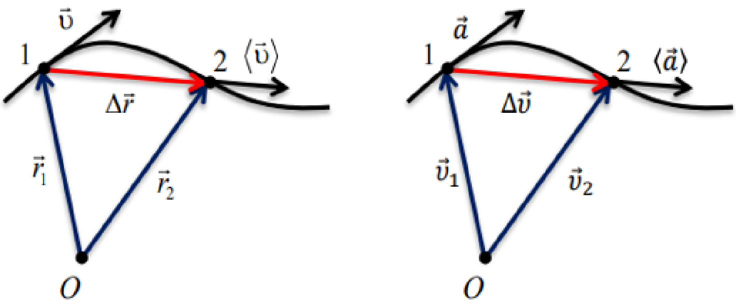

Рис. 2: Определение скорости и ускорения. Векторный способ.

Определение

Скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки.

Средняя скорость:
Средняя скорость на интервале Δt:

$$< \vec{v} >= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.1}$$

где $\Delta\vec{r}$ - перемещение, Δt - интервал времени.
Средняя путевая скорость:

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{1.2}$$

где ΔS - пройденный путь.

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.3}$$

Определение

Ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости материальной точки.

Среднее ускорение:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{1.4}$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.5}$$

Единица измерения ускорения в СИ: $[a] = \frac{м}{c^2}$.

1.4 Координатный способ описания движения

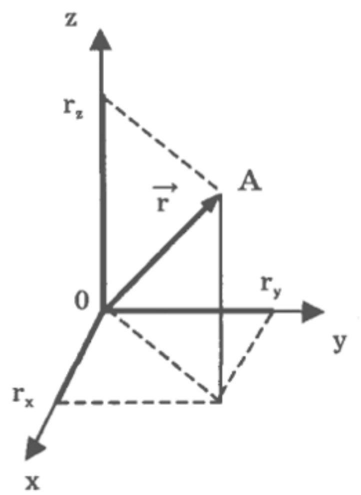

Рис. 3: Декартова система координат.

Радиус-вектор в декартовой системе координат:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{1.6}$$

Скорость материальной точки:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k} \tag{1.7}$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$.

Модуль скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.8}$$

Ускорение материальной точки:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k} \tag{1.9}$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$.

Модуль ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.10}$$

Модуль радиус-вектора:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.11}$$

1.5 Задачи кинематики

Прямая задача кинематики

Дано: $\vec{r}(t)$ или $x(t), y(t), z(t)$
Найти: $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$
Решение: дифференцирование

Обратная задача кинематики

Дано: $\vec{a}(t)$, начальные условия
Найти: $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$
Решение: интегрирование

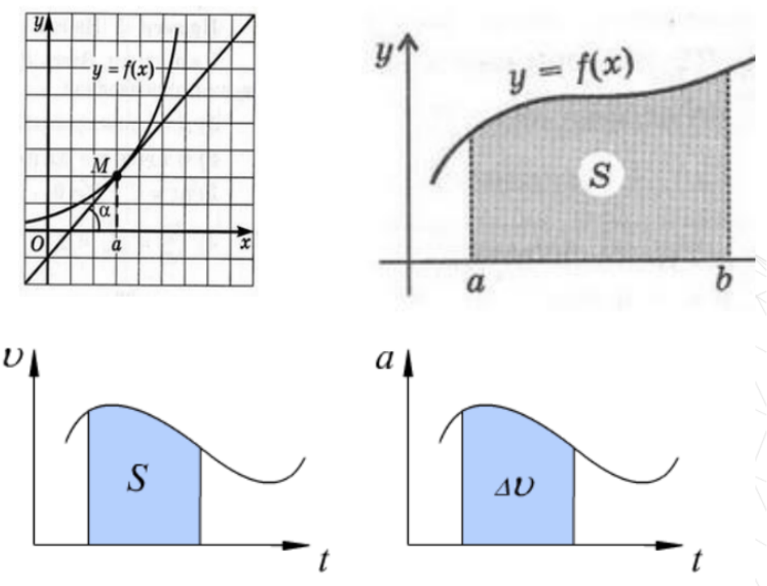

Рис. 4: Геометрический способ производной и интеграла.

Для однозначного решения обратной задачи необходимо знать начальные условия:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt \tag{1.12}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}dt \tag{1.13}$$

1.6 Численные методы решения

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.14}$$

на отрезке $[x_0, x_n]$ при условии $y(x_0) = y_0$ применяются численные методы.

Разбиваем отрезок на N частей с шагом:

$$h = \frac{x_N - x_0}{N} \tag{1.15}$$

Формула Эйлера (метод левых прямоугольников):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{1.16}$$

Оценка погрешности:

$$\varepsilon = \frac{|y_{i+1}(h/2) - y_{i+1}(h)|}{|y_{i+1}(h/2)|} < \varepsilon_{\text{зад}} \tag{1.17}$$

где $\varepsilon_{\text{зад}}$ - заданная точность (например, 5%).

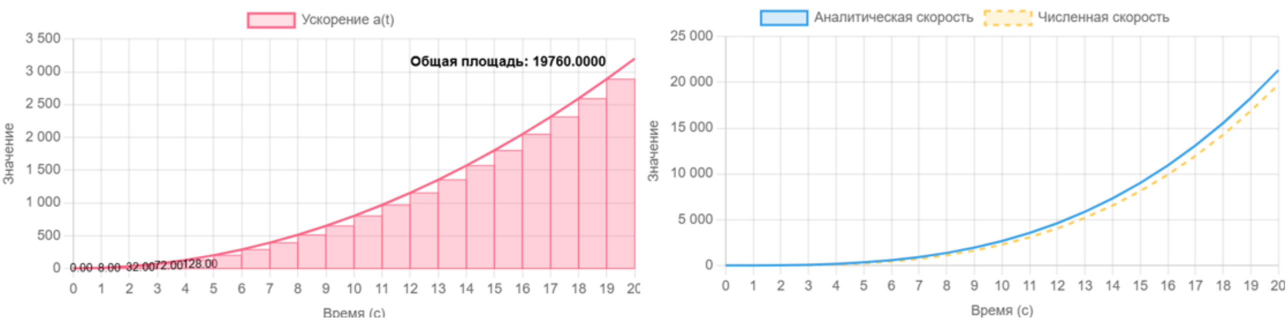

Рис. 5: Сравнение аналитического и численного решения для скорости

На рис. 7 показано сравнение аналитического и численного решения для скорости при различных шагах интегрирования.

1.7 Естественный способ описания движения

При известной траектории положение точки задается дуговой координатой $l(t)$.

Скорость:

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}, \quad v_\tau = \frac{dl}{dt} \tag{1.18}$$

Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v_\tau \tag{1.19}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{d\tau}{dl}v_\tau \tag{1.20}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\tilde{\tau} + \frac{d\tilde{\tau}}{dl}v_\tau^2 \tag{1.21}$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к траектории, .

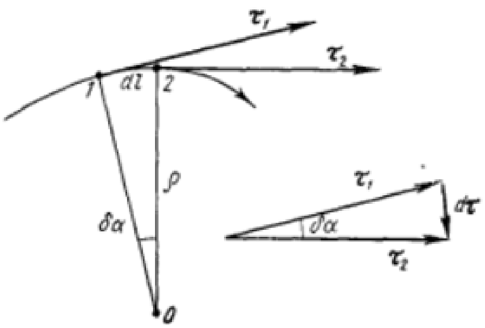

Рис. 6: Естественный способ описания движения.

$$d\tau = \tau d\alpha \tag{1.22}$$

$$dl = R d\alpha \quad d\tilde{\tau} \uparrow\uparrow \tilde{n} \tag{1.23}$$

R – радиус кривизны траектории

Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{v_\tau^2}{R}\vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{1.24}$$

где:

- $\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}$ - тангенциальное ускорение
- $\vec{a}_n = \frac{v_\tau^2}{R}\vec{n}$ - нормальное ускорение
- R - радиус кривизны траектории
- $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к траектории

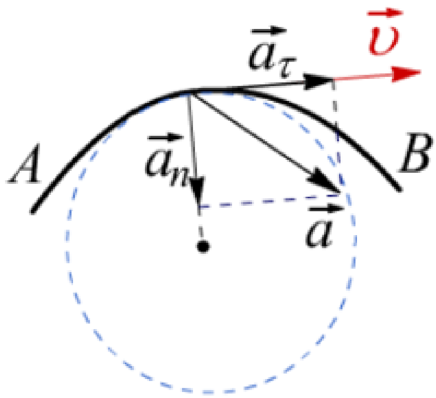

Рис. 7: Тангенциальное и нормальное ускорение.

Определение

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости, направлено по касательной к траектории.

Определение

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории.