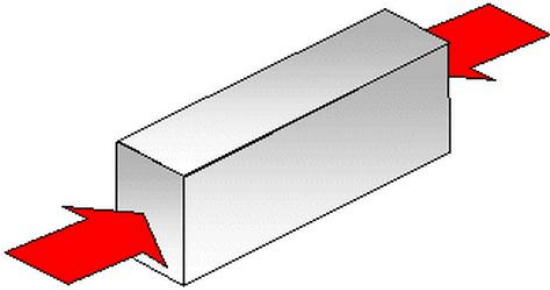


**ІТМО**

**Лекція 6**

**Деформації ТТ.**

**Механіка жидкості**



*Сила упругости* – сила, возникающая в теле в результате его деформации и стремящаяся вернуть тело в начальное положение

**Упругая деформация твёрдого тела** – это такая деформация, при которой после прекращения внешнего воздействия тело полностью восстанавливает свою форму и размеры

**Пластическая деформация** – это изменения формы и размеров тела под действием внешних сил, которые остаются после снятия нагрузки



# Деформации

деформация растяжения – сжатия.  $\Delta l = l - l_0$   
называется абсолютной деформацией

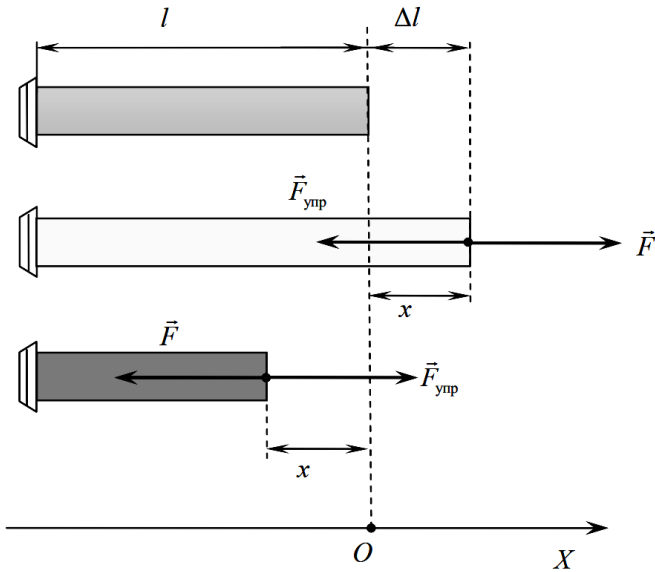
$$|\Delta l \ll l_0|$$

$$|\vec{F}_{\text{упр}}| = k\Delta l = k\Delta x$$

$k$  – коэффициент жесткости тела. Коэффициент жесткости зависит от формы и размеров тела, а также от материала

Относительная деформация

$$\varepsilon_l = \Delta l / l_0$$



# Деформации

*Нормальное напряжение:* во всех точках поперечного сечения стержня напряжения одинаковы и направлены по нормали к сечению

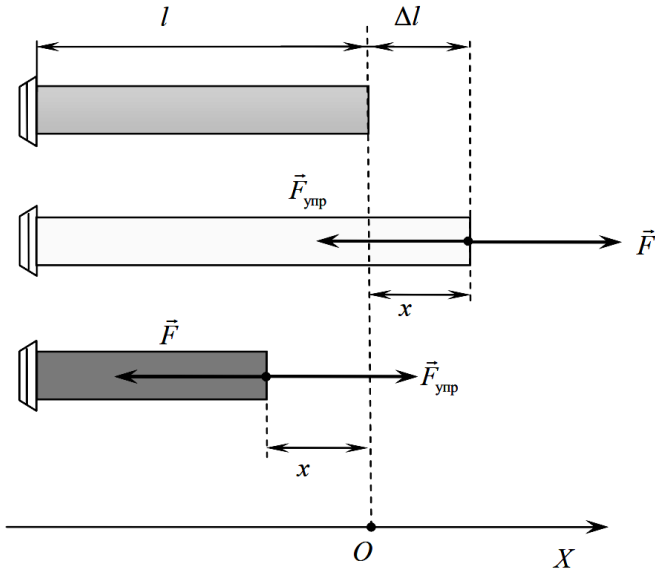
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

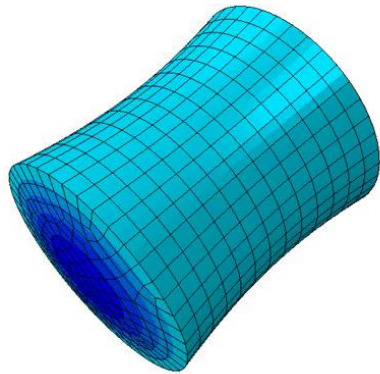
*закон Гука для деформации растяжения – сжатия*

$$\sigma = \varepsilon E$$

$E$  называется модулем Юнга для деформации растяжения – сжатия

*Модуль Юнга* зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела. Модуль Юнга равен напряжению, которое необходимо приложить к телу, чтобы удлинить его в 2 раза



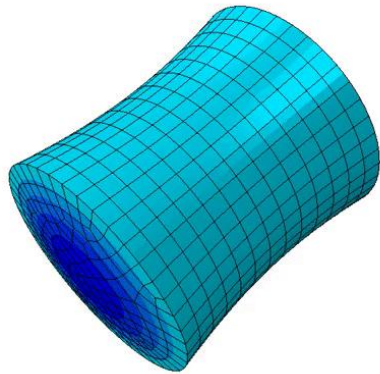


Относительное продольное растяжение (сжатие) тела  $\varepsilon_l$  сопровождается его относительным сужением (расширением)  $\varepsilon_b = \Delta b/b_0$  где  $b$  – поперечный размер тела

Коэффициентом Пуассона (модулем поперечного сжатия)  $\mu$  называется отношение относительного поперечного сужения (расширения)  $\varepsilon_b$  к относительному продольному удлинению (сжатию)  $\varepsilon_l$

$$\mu = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_l}$$

Из теоретических соображений  $-1 \leq \mu \leq 0,5$ .  
Материалы с отрицательным  $\mu$  неизвестны. Для большинства твердых тел из опыта  $\mu \approx 0,25$

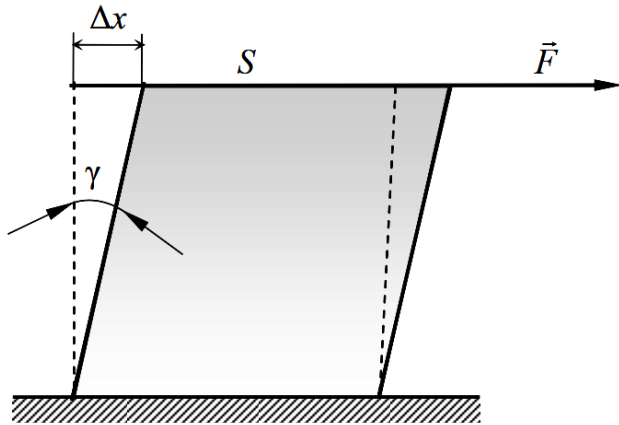


Деформация всестороннего сжатия (растяжения) – уменьшение (увеличение) объема тела без изменения его формы под влиянием равномерно распределенных по всей поверхности тела сжимающих (растягивающих) сил

$$\sigma = K \varepsilon_V = K \frac{\Delta V}{V}$$

модуль всестороннего сжатия (объемной упругости)  $K = \sigma / \varepsilon_V$  численно равен напряжению при относительном изменении объема, равном единице

$$E = \frac{G}{2(1 + \mu)}$$
$$K = \frac{2G(1 + \mu)}{3(1 - 2\mu)}$$



*Деформация сдвига* – вид деформации тела, возникающей в том случае, если сила прикладывается касательно его поверхности, при этом нижняя часть тела закреплена неподвижно. При деформации сдвига одна плоскость тела смещается относительно другой

*Относительная деформация сдвига*

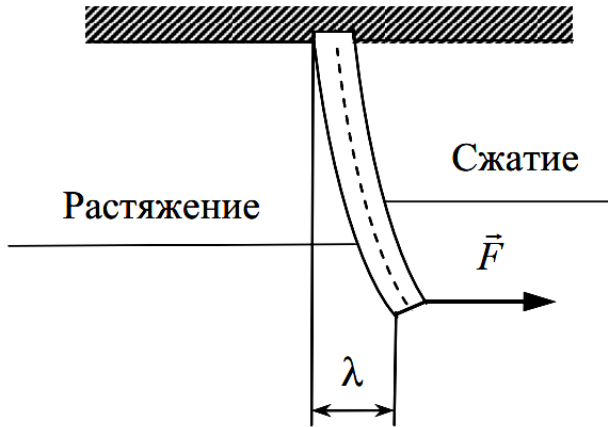
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{l}$$

*Закон Гука для деформации сдвига*

$$\tau = G\gamma$$

$\tau$  – касательное напряжение;  $G$  – модуль сдвига

*Деформация изгиба* – вид деформации, при которой нарушается прямолинейность главной оси тела



стрела прогиба для стержня, закрепленного одним концом в стене

$$\lambda = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}$$

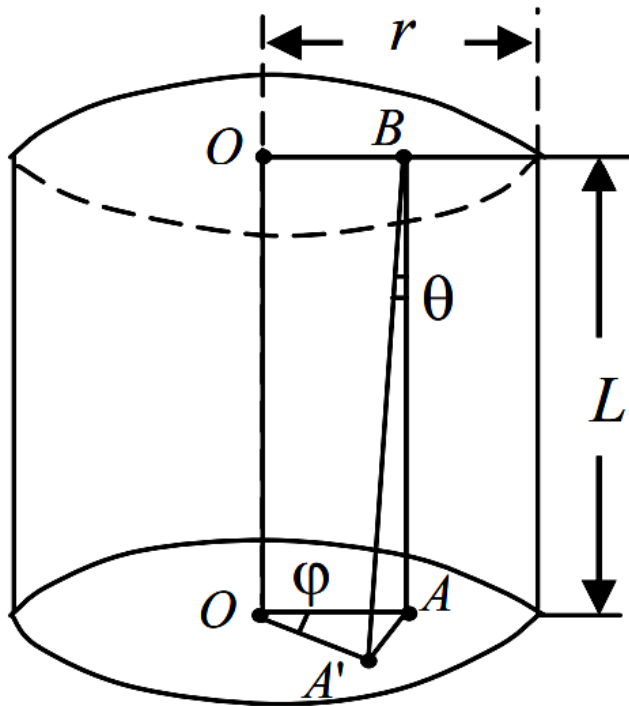
Величина  $I$  носит название момента «инерции» поперечного сечения балки

линиз прогиба  $u(x)$

$$u(x) = \frac{1}{2} \frac{F}{E \cdot I} \left( lx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$



# Деформации



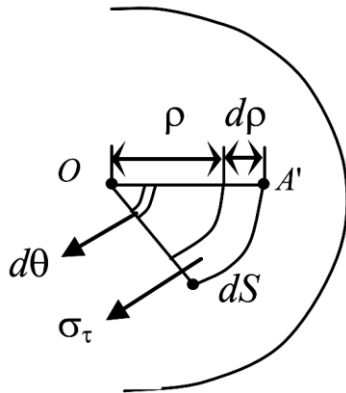
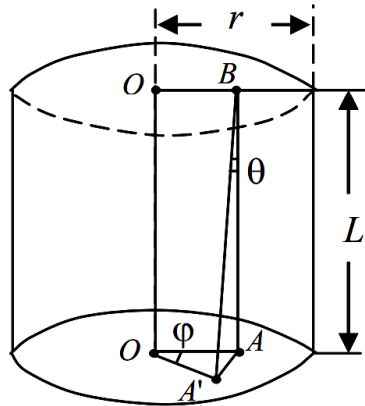
Кручением называется деформация тела (струны) с одним закрепленным концом под действием пары сил, плоскость которой перпендикулярна к оси тела.

Момент  $M$  этой пары сил называется крутящим (вращательным) моментом

относительная деформация кручения  $\varphi_L = \frac{\varphi}{L}$

$$M = D\varphi_L$$

$D$  – модуль кручения



При закручивании струны ее нижний торец испытывает сдвиг относительно верхнего

$$\sigma_{\tau} = G\theta, \quad \theta = \frac{AA'}{L} = \frac{\varphi\rho}{L} \Rightarrow \sigma_{\tau} = G\frac{\varphi\rho}{L}$$

вращающий момент относительно точки O

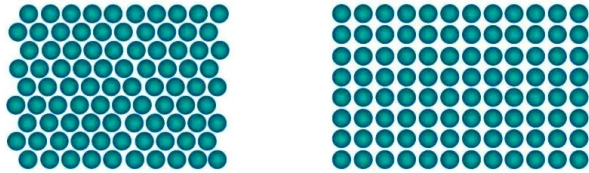
$$dM = \rho\sigma_{\tau}dS, \quad dS = \rho d\rho d\theta$$

$$dM = \sigma_{\tau}\rho^2 d\rho d\theta = G\frac{\varphi}{L}\rho^3 d\rho d\theta$$

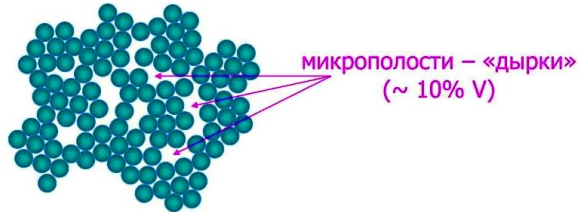
$$M = G\frac{\varphi}{L} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_0^r \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi Gr^4}{2} \cdot \frac{\varphi}{L} \Rightarrow \varphi = \frac{2}{\pi G} \cdot \frac{L}{r^4} \cdot M$$

$$M = D\varphi L \Rightarrow D = \frac{\pi Gr^4}{2}$$

В кристаллах – дальний порядок



В жидкостях – ближний порядок

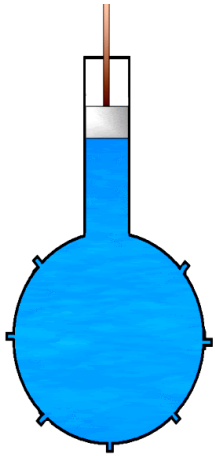


Раздел механики, в котором изучаются состояние равновесия и движения жидкостей и газов под действием внешних сил, называется *гидроаэромеханикой*

*Сжимаемость* характеризует способность вещества изменять свой объем под действием всестороннего давления

В механике жидкости и газы рассматриваются как *сплошные однородные среды*

Вследствие общности ряда свойств жидкостей и газов во многих механических явлениях они ведут себя качественно одинаково



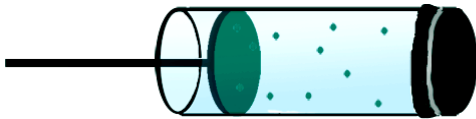
Жидкости и газы могут быть определены как среды, в которых при равновесии касательные напряжения существовать не могут

Физическая величина, равная силе, действующей на единицу площади поверхности выделенного объема по нормали к поверхности, называется *давлением*

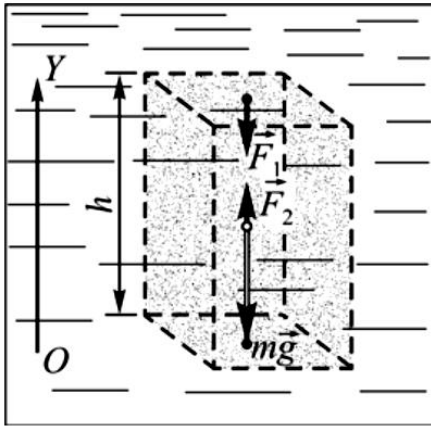
$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

$$p = \frac{dF}{dS}$$

Закон Паскаля: *давление, создаваемое внешними силами, которые действуют на поверхность жидкости, передается без изменения во все точки жидкости*



# Механика жидкостей и газов



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0$$

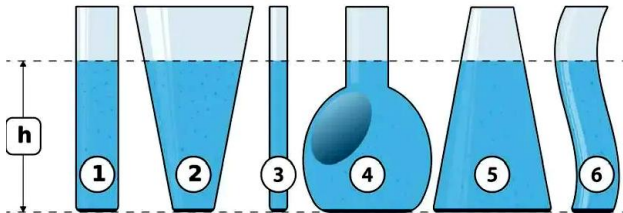
$$-p_1S + p_2S - \rho ghS = 0$$

$$p_2 = p_1 + \rho gh$$

$p = \rho gh$  – гидростатическое давление

Гидростатическое уравнение:

$$p = p_0 + \rho gh$$



Гидростатический парадокс: сила давления на дно сосуда не всегда равна весу жидкости в сосуде

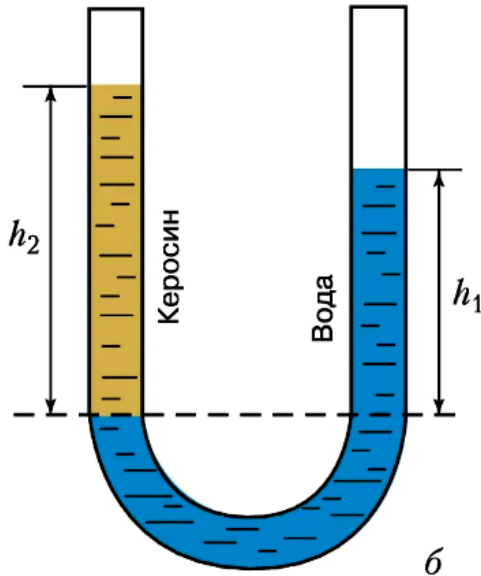
$$p_{\text{слева}} = p_{\text{справа}}$$

$$p_{\text{слева}} = p_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h$$

$$p_{\text{справа}} = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g h$$

$$p_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g h$$

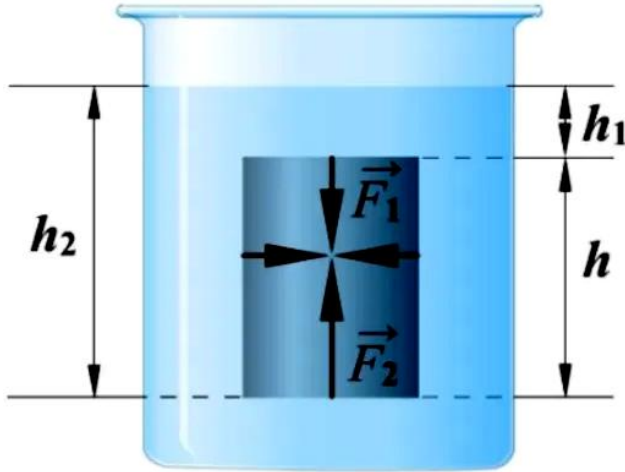
$$\rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$



Однородные жидкости устанавливаются в сообщающихся сосудах на одном уровне; если жидкости в сообщающихся сосудах неоднородны, то их высоты обратно пропорциональны плотностям жидкостей

$$F_1 = p_0S + \rho gSh_1 \quad F_2 = p_0S + \rho gSh_2$$

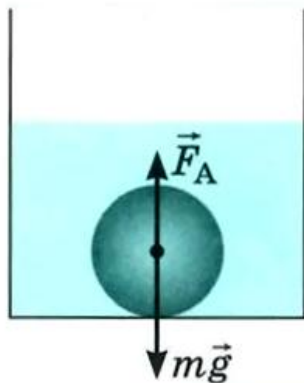
$$F_A = F_2 - F_1 = \rho gS(h_2 - h_1) = \rho gSh = \rho gV = P_{\text{ж}}$$



на тело, погруженное в жидкость или газ, действует *выталкивающая сила*, направленная вертикально вверх, численно равная весу жидкости или газа в объеме погруженной части тела и приложенная в центре этого объема. Точку приложения выталкивающей силы называют *центром давления*

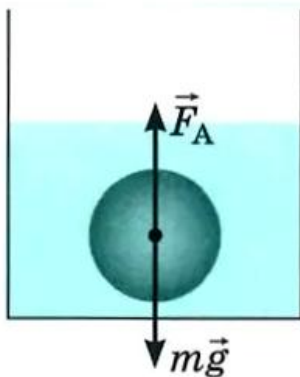
если сосуд с жидкостью движется с ускорением  $\vec{a}$

$$\vec{F}_A = m(\vec{g} - \vec{a})$$



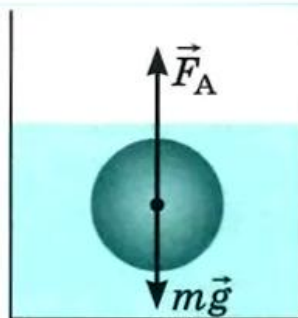
$$F_A < mg$$
$$\rho_{\text{ж}} V g < \rho_{\text{т}} V g$$

Тело тонет.



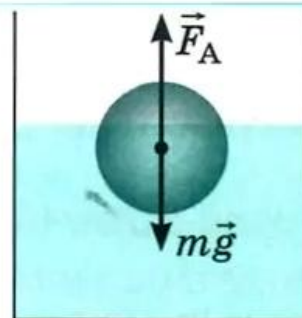
$$F_A = mg$$
$$\rho_{\text{ж}} V g = \rho_{\text{т}} V g$$

Тело плавает  
на любой глубине.



$$F_A > mg$$
$$\rho_{\text{ж}} V g > \rho_{\text{т}} V g$$

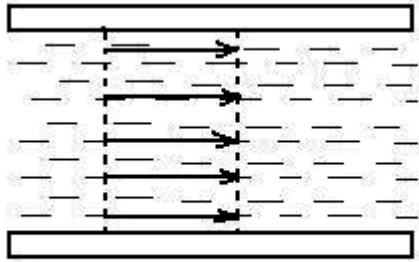
Тело всплывает.



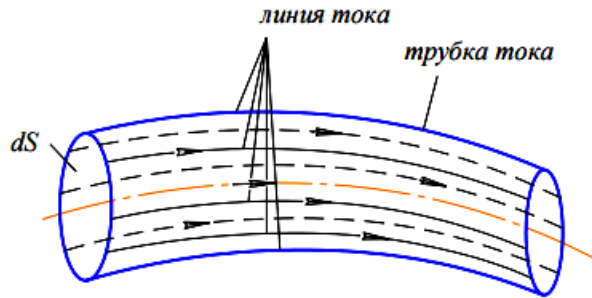
$$F_A = mg$$
$$\rho_{\text{ж}} V_{\text{погр.}} g = \rho_{\text{т}} V g$$

Тело плавает  
на поверхности.





Идеальная жидкость



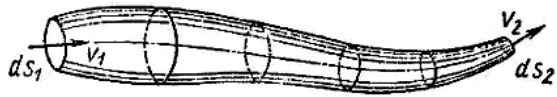
*Идеальная жидкость* – воображаемая несжимаемая жидкость, лишенная *вязкости* и *теплопроводности*

Движение слоев жидкости или газа относительно друг друга или всей жидкости или газа относительно твердых тел называют *течением*.

Совокупность частиц движущейся жидкости называется *поток*

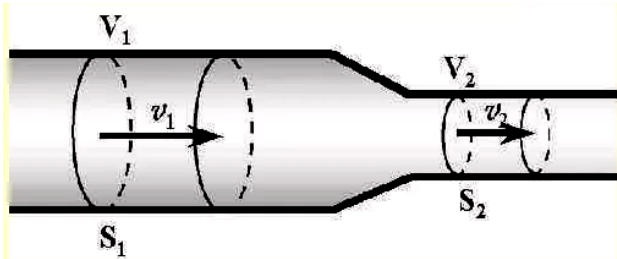
Совокупность векторов скоростей, заданных для всех точек пространства, образует *поле вектора скорости*

*линии тока* – линии, касательная к которым в каждой точке совпадает по направлению с вектором скорости



Объем жидкости через сечения

$$V_1 = \rho S_1 v_1 t \quad V_2 = \rho S v_2 t$$

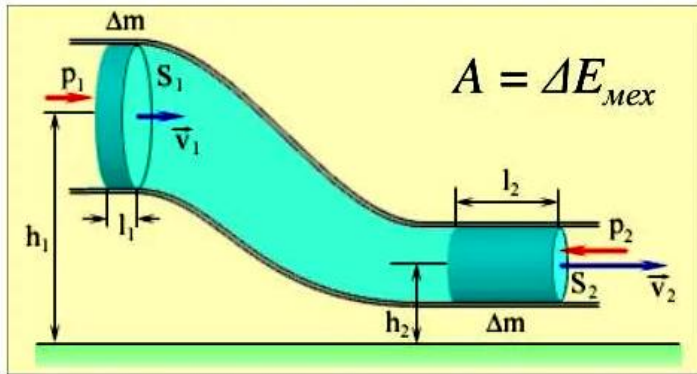


Для несжимаемой жидкости  $V_1 = V_2$

Уравнение неразрывности струи

$$Sv = \text{const}$$

изменение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости равно сумме работ силы тяжести и сил давления



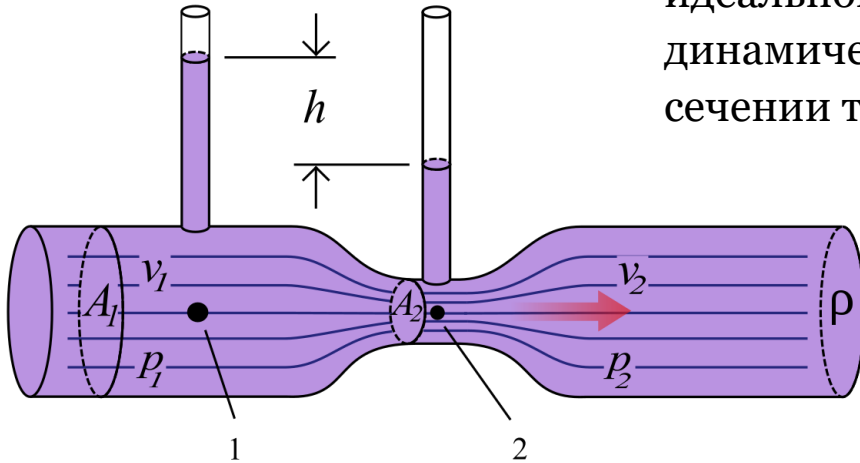
$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta m g (h_1 - h_2) + p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2$$

$$p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta m g (h_1 - h_2) + (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1$$

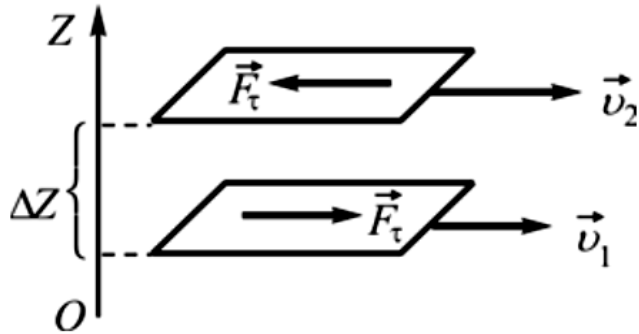
Уравнение Бернулли: при стационарном течении идеальной жидкости сумма ее статического и динамического давлений постоянна в любом сечении трубы



$$(p + \rho gh) + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

Уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии для единицы объема жидкости

При движении реальной жидкости между ее слоями возникают *силы внутреннего трения*, или *силы вязкости*



Отношение  $\frac{\Delta v}{\Delta z}$  характеризует, как быстро изменяется скорость от слоя к слою в направлении, перпендикулярном скорости движения слоев, и называется *градиентом скорости*

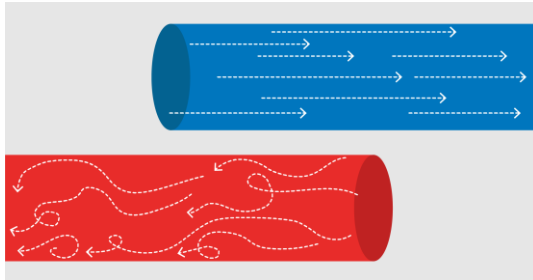
Сила внутреннего трения

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} S$$

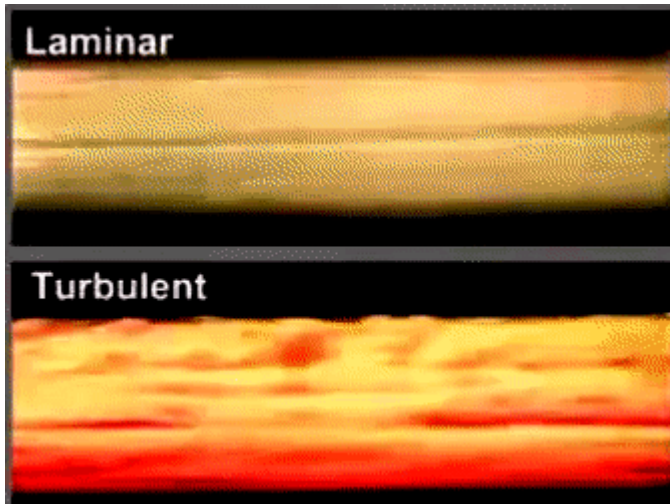
Коэффициент динамической вязкости зависит от температуры: в жидкостях  $\eta$  с повышением температуры уменьшается, в газах – увеличивается

# Механика жидкостей и газов

ІТМО



Течение жидкости называется *ламинарным* (слоистым), если выделенный вдоль потока слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними. Ламинарное течение стационарно



Течение жидкости называется *турбулентным* (вихревым), если в потоке происходит перемешивание частиц жидкости. Турбулентное течение нестационарно.

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{du(r)}{dr} S = -\eta \frac{dv(r)}{dr} \cdot 2\pi r L$$

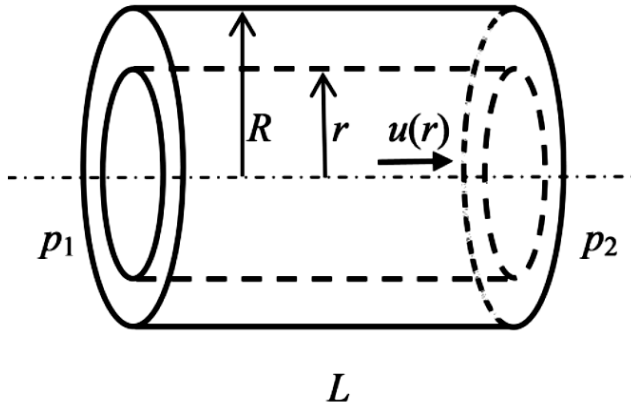
Сила, возникающая из-за перепада давлений

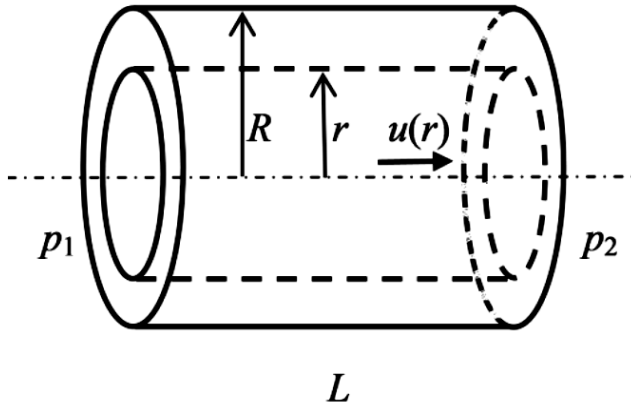
$$F = (p_1 - p_2) \pi r^2$$

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = -\eta \frac{dv(r)}{dr} \cdot 2\pi r L$$

$$dv(r) = -\frac{(p_1 - p_2) \pi r^2}{2\pi \eta r L} dr = -\frac{(p_1 - p_2) r}{2\eta L} dr$$

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + \text{const}$$





$$v(r = R) = 0 = -\frac{\Delta p}{4\eta L} R^2 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2$$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

$$F_{\text{тр}} = \Delta p \cdot \pi R^2 = 4\pi\eta L v(0)$$

Объем жидкости, вытекающей из трубы в единицу времени

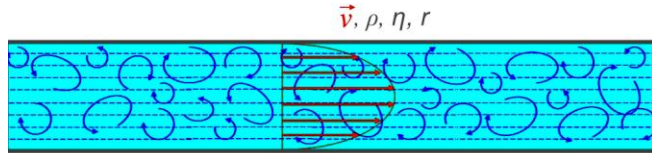
$$dV(r) = 2\pi r v(r) t dr = 2\pi r \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) t dr$$

Формула Пуазейля

$$\frac{V(R)}{t} = \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} R^4$$



Переход от ламинарного течения к турбулентному



Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Для потока в трубе:

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta}$$

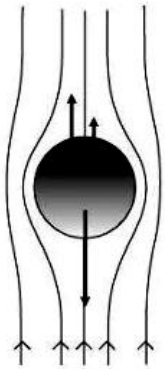
$$Re_{кр} \sim 1000$$

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

При достаточно больших скоростях и определенных размерах трубы движение жидкости становится неустойчивым, ламинарное течение жидкости переходит в турбулентное

переход от ламинарного течения к турбулентному определяется безразмерным числом (число Рейнольдса)

$\rho$  – плотность жидкости,  $v$  – средняя скорость потока по сечению трубы,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $l$  – характерный размер сечения потока (в длинных цилиндрических трубах  $l$  равно диаметру)



Суммарная сила вязкости при небольших скоростях движения пропорциональна скорости потока

$$F_c = C_x v$$

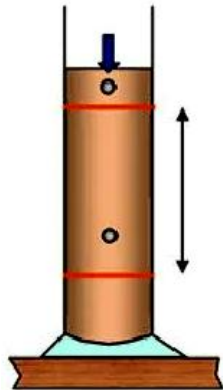
$C_x$  – коэффициент, который зависит от вязкости жидкости, размеров и формы тела, его ориентации в потоке

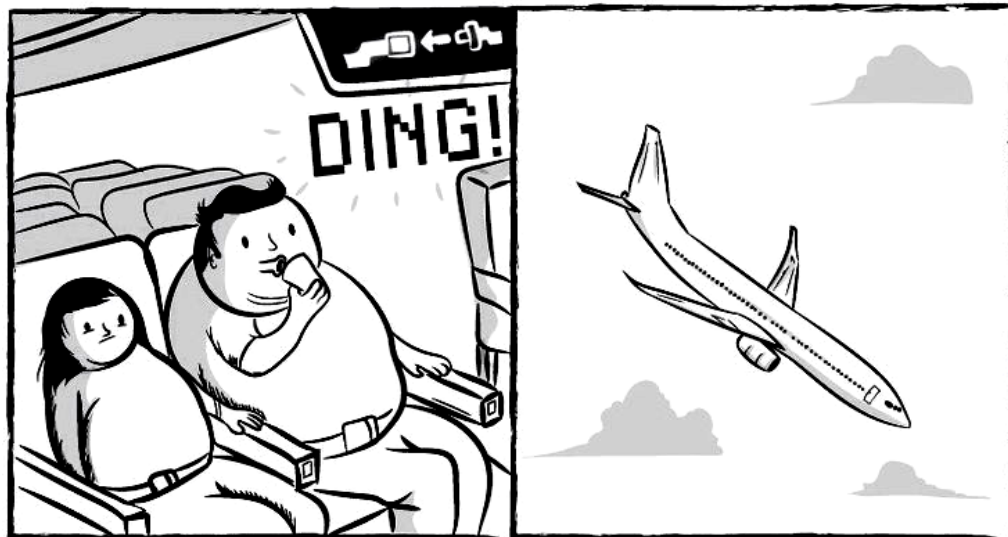
при значениях числа Рейнольдса, меньших единицы для шаров в вязкой жидкости

$$C_x = 6\pi\eta r$$

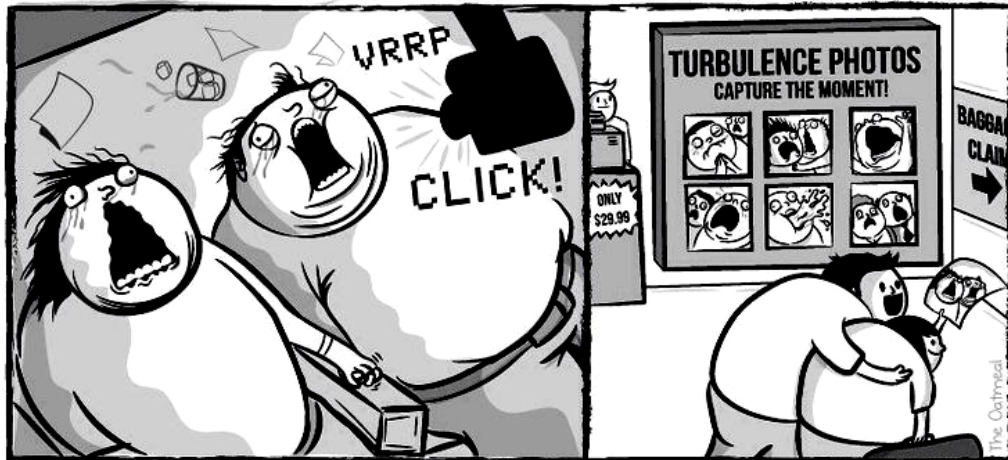
Формула Стокса

$$F_c = 6\pi\eta r v$$





VITMO



**Спасибо  
за внимание!**

**ITMO** *re than a*  
**UNIVERSITY**

[nnkhvastunov@itmo.ru](mailto:nnkhvastunov@itmo.ru)