Электричество и магнетизм

Лекция 2

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

Поток вектора через замкнутую поверхность должен быть равен нулю.

Таким образом:

$$\boxed{\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0}$$

Это теорема Гаусса для Φ_B (в интегральной форме): ***поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.***

***В природе нет магнитных зарядов – источников магнитного поля*, на которых начинались и заканчивались бы линии магнитной индукции**.
Заменив поверхностный интеграл объемным, получим:

$$\boxed{\int_V \nabla B dV = 0}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \qquad \boxed{\nabla \vec{B} = 0.}$$

*Магнитное поле обладает тем свойством, что его **дивергенция** всюду равна нулю*:

Электростатического поля может быть выражено скалярным потенциалом φ, *а **магнитное поле – вихревое, или соленоидальное***

Вихревой характер магнитного поля

- В электростатическом поле силовые линии начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Силовые линии разомкнуты.
- В магнитном поле силовые линии замкнуты.
- Поле, в котором силовые линии замкнуты называется вихревым.
- Магнитное поле – вихревое поле. Магнитных зарядов в природе не существует.

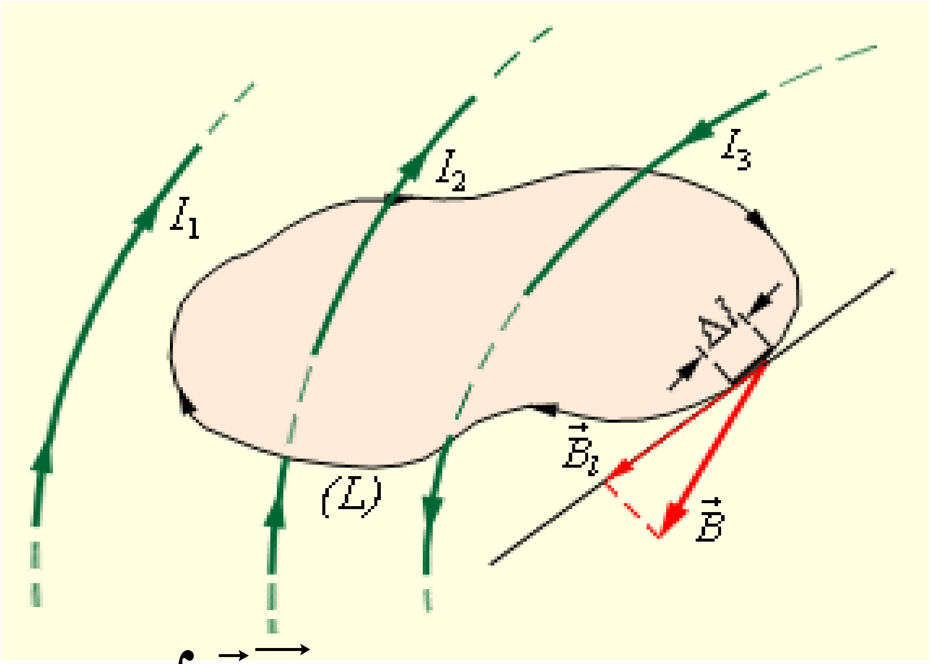
- Возникают магнитные поля в присутствии токов и являются вихревыми полями в области, где есть токи.

- Магнитные линии образуют петли вокруг токов.
- Не имея ни конца, ни начала, линии **B** возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли.
- В любых, самых сложных случаях линии **B** не исходят из точек.
- Утверждение, что $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$, справедливо всегда.

ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

$$\boxed{\oint\limits_L \vec{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i}$$

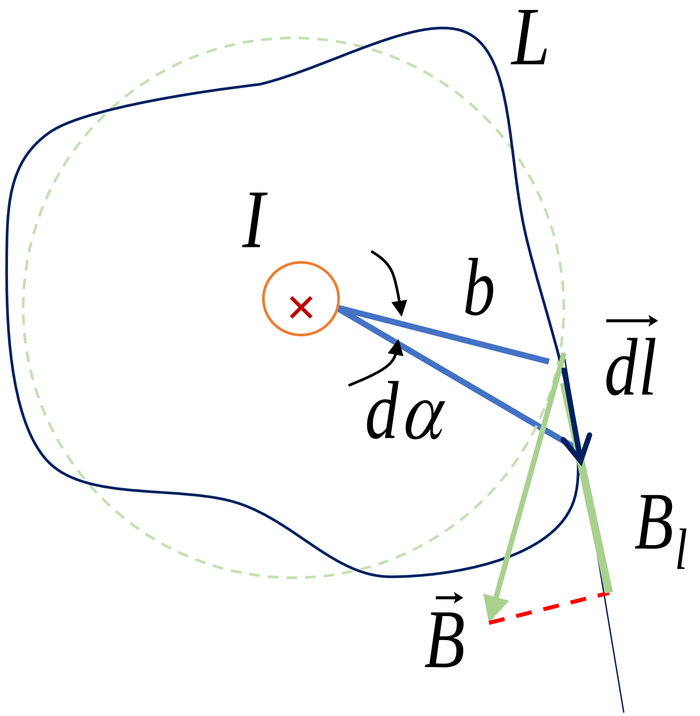
Циркуляция вектора магнитной индукции вдоль любого замкнутого контура **пропорциональна алгебраической сумме токов**, *охватываемых* этим контуром.



$$\oint\limits_L \vec{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 (I_3 - I_2)$$

Пояснение: I_3 берется со знаком «+», так как составляет с обходом контура правовинтовую систему, соответственно I_2 - «-»

ЦИРКУЛЯЦИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ПРЯМОГО ТОКА



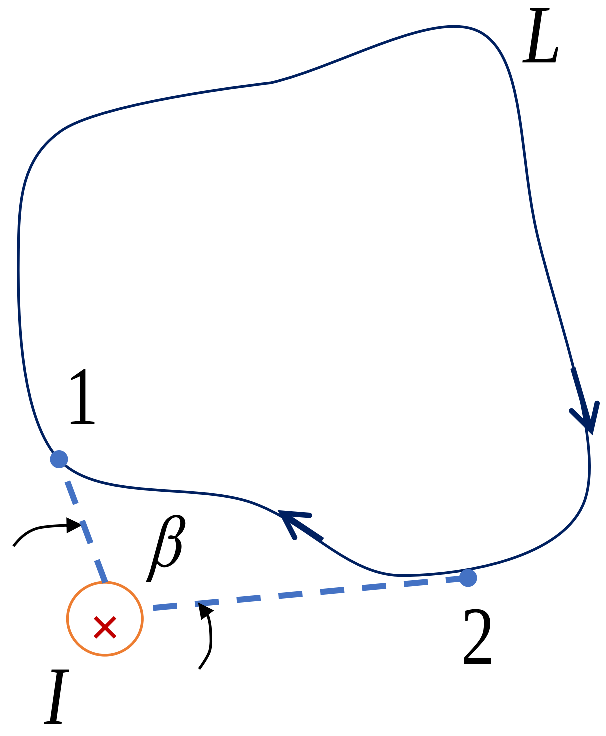
$$\vec{B}\vec{dl} = B_l dl = B dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} b d\alpha$$

$$\oint_L \vec{B}\vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\alpha$$

$$\oint_L d\alpha = 2\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I}$$

ЦИРКУЛЯЦИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ПРЯМОГО ТОКА (ток вне контура)



$$\oint\limits_L \vec{B}\overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint\limits_L d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int\limits_1^2 d\alpha + \int\limits_2^1 d\alpha\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\beta - \beta) = 0$$

$$\oint\limits_L \vec{B}\overrightarrow{dl} = 0$$

Таким образом, если ток **не** охватывается контуром, циркуляция вектора $\vec{B}$ вдоль этого контура равна нулю!

РОТОР ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = \int_S \vec{j}d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_S rot\vec{B}d\vec{S}$$

$$\int_S rot\vec{B}d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\boxed{rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

$$\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

$$\oint_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

$$\nabla\vec{B} = 0;$$

$$\oint_L \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = 0$$

$$\left[\nabla\vec{E}\right] = 0$$

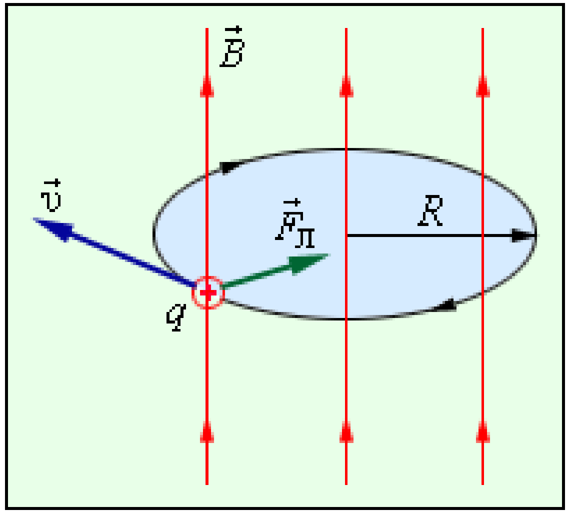
$$\oint_L \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$\left[\nabla\vec{B}\right] = \mu_0 \vec{j}.$$

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Силой Лоренца называется сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся во внешнем электромагнитном поле.

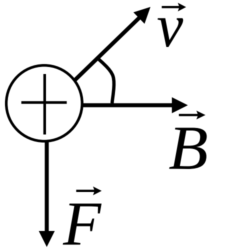
$$\vec{F} = [e \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}]$$

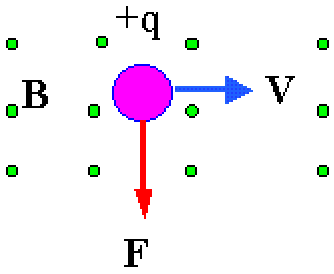


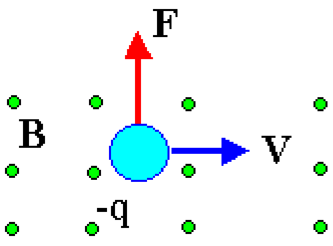
Направление силы Лоренца зависит от знака заряда и перпендикулярно к плоскости, в которой лежат вектора V и B

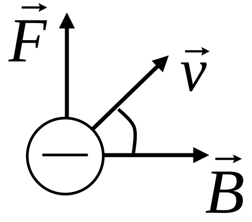
Таким образом сила Лоренца максимальна, если направление движения частицы перпендикулярно магнитному полю ($\alpha=\pi/2$),
равна нулю, если частица движется вдоль направления поля B ($\alpha = 0$).

Сила Лоренца *<u>всегда</u>* перпендикулярна скорости и поэтому она не совершает работы, не изменяет модуль скорости заряда и его кинетической энергии. Но направление скорости изменяется непрерывно









$$\vec{F} = q \cdot \left[\vec{V} \times \vec{B}\right]$$

$$\vec{F} = -q \cdot \left[\vec{V} \times \vec{B}\right]$$

Сила Лоренца будет изменять только направление скорости, заставляя заряд описывать криволинейную траекторию.

Приравнивая силу Лоренца $\quad$ **F = e·*V*·B·sinα**

центробежной силе $\quad$ $\mathbf{F} = \dfrac{mv^2}{R}$

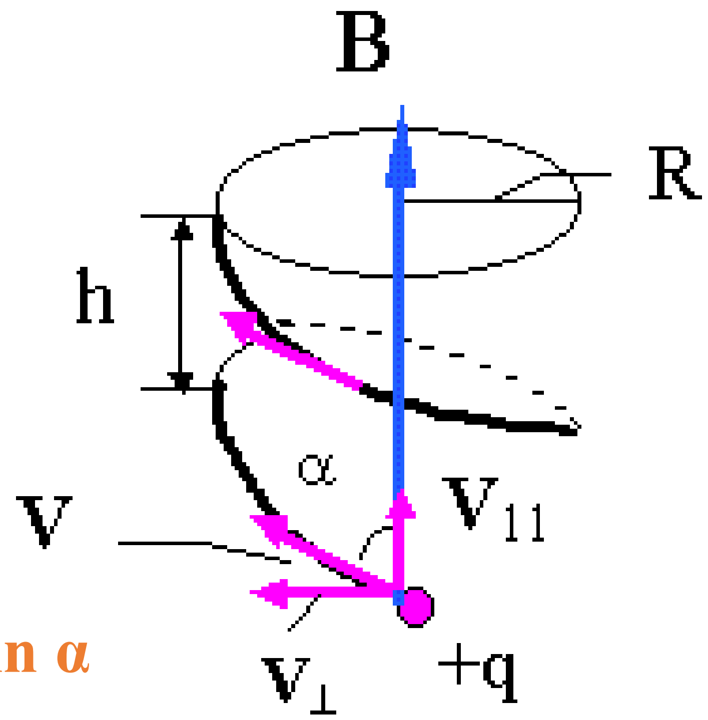
можно рассчитать радиус кривизны R траектории заряда в том месте, где существует магнитное поле B:

$$e \cdot V \cdot B \cdot \sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$$

$$\boxed{R = \frac{m \cdot v}{e \cdot B \cdot \sin\alpha}}$$

Если магнитное поле однородное и постоянное, то радиус кривизны траектории не меняется (Const).

Если составляющая скорости вдоль направления поля $V_{II} = V \cdot \cos\alpha \neq 0$, то заряд будет описывать винтовую линию вокруг оси, ориентированной по направлению поля.



Движение заряженной частицы, влетевшей под углом $\alpha \neq \pi/2$ в магнитное поле B

$V_{\perp} = V \cdot \sin\alpha$

$V_{II} = V \cdot \cos\alpha$

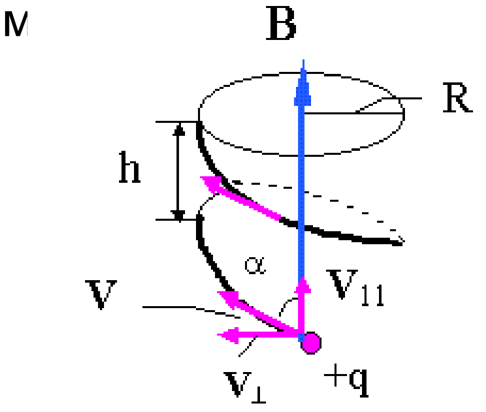
При $\alpha = \pi/2$, $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, заряд будет описывать окружность, плоскость которой перпендикулярна к направлению поля.

Период обращения частицы (время одного оборота) не зависит от скорости, если скорость частицы много меньше скорости света в вакууме. В противном случае период обращения частицы возрастает в связи с возрастанием релятивистской массы.

Частота обращения вокруг направления магнитного поля ω = $\frac{v}{R} = \frac{e}{m}B$ не зависит от скорости электронов.

период обращения частицы: $$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Расстояние h, которое проходит частица за время T вдоль магнитного поля B (шаг винтовой траектории), определяется по форм



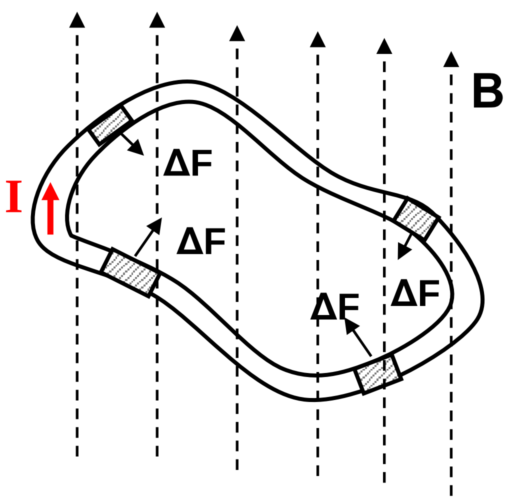
$$h = v \cdot \cos\alpha \cdot T$$

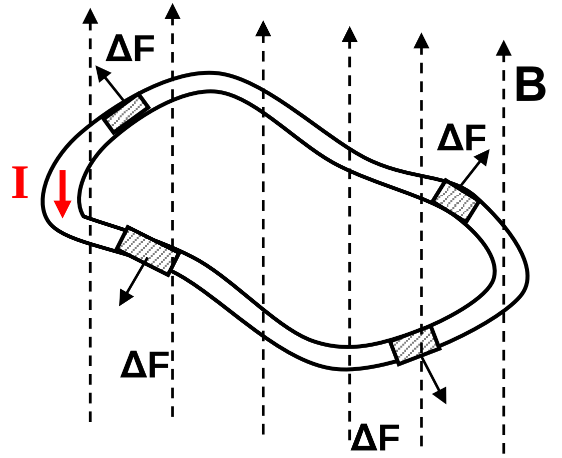
Действие магнитного поля на контур с током

на каждый из двух бесконечных прямолинейных проводника с током, находящихся в магнитном поле, действует сила

$$F = I_1 \cdot B_2 \cdot l = I_2 \cdot B_1 \cdot l = \mu\mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l$$

действие магнитного поля на замкнутый проводник с током.

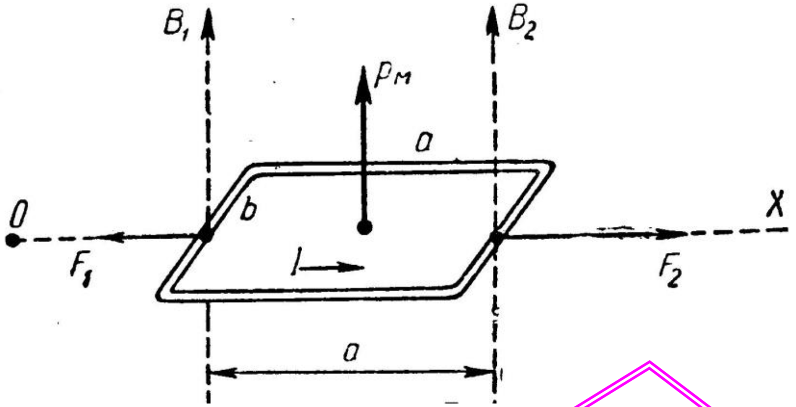




В случае если магнитное поле однородно, то силы только деформируют контур (в зависимости от направления тока), а равнодействующая этих сил равна нулю.

Если магнитное поле неоднородно, то контур не только деформируется, но и перемещается в ту область, куда направлена равнодействующая сил.

1) *первый случай* - прямоугольная рамка, плоскость которой перпендикулярна направлению поля , причем вектор B возрастает вдоль оси OX по линейному закону.



$$B_2 - B_1 = \frac{\partial B}{\partial x} a$$

Направление силы определяется по правилу левой руки

$$\mathbf{F_2 > F_1}$$

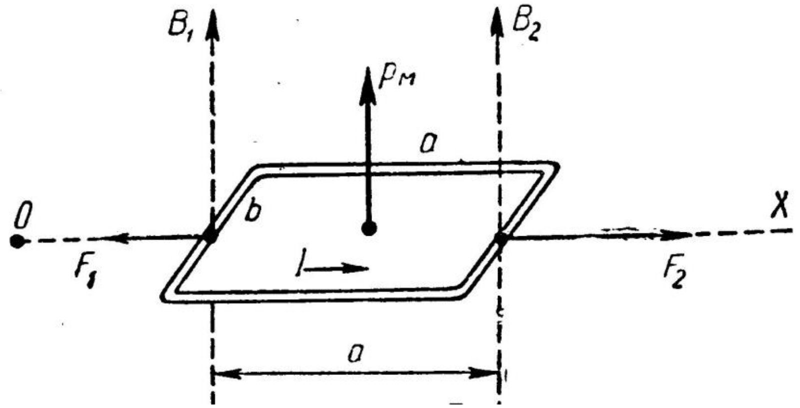
На контур действует сила $F = F_2 - F_1 = I \cdot b \cdot B_2 - I \cdot b \cdot B_1 =$

$$= \frac{\partial B}{\partial x} I \cdot a \cdot b = \frac{\partial B}{\partial x} I \cdot S$$

Условимся характеризовать контур с током вектором $\vec{p}_m$, численно равным $p_m = I \cdot S$ и направленным перпендикулярно к плоскости контура в соответствие с правилом правого буравчика, ручка которого вращается по току.

В случае *неоднородного* поля

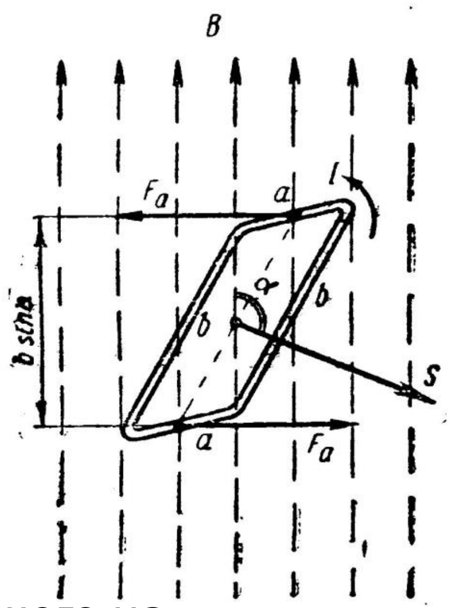
Если $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{p}_m$ на контур действует сила, направленная в сторону увеличения $\vec{B}$, т.е. контур будет ***втягиваться*** в поле



Если $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{p}_m$, то сила направлена в сторону уменьшения $\vec{B}$, т.е. контур будет ***выталкиваться*** из поля.

Если поле однородно и $B_2 = B_1$, то силы равны и только деформируют контур (сжимают или растягивают его в зависимости от направления тока).

2) *второй случай* – пусть теперь плоскость контура составляет некоторый угол α с направлением поля, а поле - однородно.



Пусть стороны b перпендикулярны индукции B , тогда на стороны a будут действовать силы: $F_a = I \cdot B \cdot a$, составляющие пару сил с моментом

$$M = F_a \cdot b \cdot \sin\alpha = I \cdot B \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha = B \cdot I \cdot S \cdot \sin\alpha$$

На стороны b действуют силы, лежащие в плоскости рамки и деформирующие ее

максимальное значение вращающего момента, действующего на замкнутый контур с током, помещенный в магнитное поле

$$M = B \cdot I \cdot S$$

Этот момент стремится повернуть контур с током так, чтобы плоскость контура была бы перпендикулярна к $\vec{B}$

В общем случае, когда поле неоднородное, а контур с током имеет произвольную форму, магнитное поле деформирует контур, поворачивает его и перемещает его к областям с большей индукцией $\vec{B}$

Если контур с током представляет собой катушку или соленоид с **n** витками, то вращающий момент **M = B·I·S** нужно умножить на число витков **n**.

Посчитаем работу, совершаемую моментом М при повороте контура с током на угол dα:

$$dA = M \cdot d\alpha = I \cdot B \cdot S \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = I \cdot d(B \cdot S \cdot \cos\alpha) = I \cdot d\Phi$$

$$\boxed{\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha}$$

Для неоднородного магнитного поля. $d\Phi = B \cdot \cos\alpha \cdot dS$

$$\boxed{\Phi = \int_S B \cos\alpha \, dS}$$

Тогда работа, совершаемая моментом М, действующим на контур с током, при повороте на угол α равна:

$$\boxed{\Delta A = M \cdot \Delta\alpha = I \cdot \Delta\Phi}$$

ΔФ – изменение магнитного потока, охватываемого контуром

Произведение **I · S** или для соленоида с n витками **I · n · S**

$$I \cdot S = p_m$$

магнитный момент замкнутого контура

Если представить магнитный момент в виде вектора, ориентированного перпендикулярно площадке S (в направлении куда двигался бы буравчик, вращаемый по направлению тока), тогда

$$M = B \cdot I \cdot S \cdot \sin\alpha = \left[\vec{p}_m \vec{B}\right]$$

Магнитный момент измеряется в (А · $м^2$)

Частицы, входящие в состав атома, обладают также магнитными моментами, вовсе не связанными с какими-либо движениями зарядов, то есть с токами. Для них магнитный момент является таким же «врожденным» качеством, как заряд, масса и т. п.

Магнитным моментом обладает даже частица, не имеющая электрического заряда,— нейтрон, составная часть атомных ядер. Магнитным моментом обладают поэтому и атомные ядра. Это- спиновый магнитный момент

Электроны, вращающиеся по замкнутым орбитам, также имеют магнитный момент, он называется орбитальным

Пусть электрон вращается по окружности радиуса R с постоянной скоростью v

Сила тока такого движения

$$I = e\cdot\frac{v}{2\pi R}$$

число оборотов в единицу времени

тогда

$$p_m = IS = e\frac{v}{2\pi R}\cdot\pi R^2 = \frac{1}{2}evR$$

Умножив и разделив выражение на массу электрона, получим

$$\boxed{p_m = \frac{e}{2m}mvR = \frac{e}{2m}p}$$

магнитный момент электронной орбиты

механический момент количества движения электрона на орбите

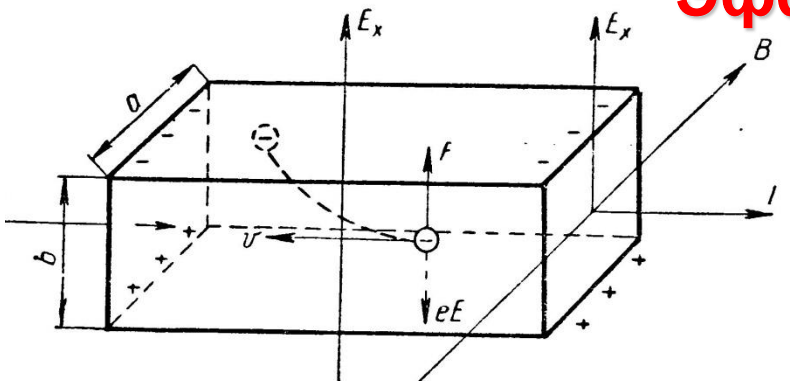
В атомах и молекулах различных тел имеется множество электронов, вращающихся по орбитам. Так как магнитный момент – вектор, ориентированный перпендикулярно к плоскости орбиты, то можно найти векторную сумму магнитных моментов всех электронов, входящих в состав атомов или молекул.

Известно, что электрон, вращающийся по орбите как волчок, независимо от своего движения по орбите имеет определенный магнитный и механический момент (спин), причем

$$\boxed{\frac{p_m}{p} = \frac{e}{m}}$$

Суммируя магнитные моменты, существующие в данном атоме, молекуле нужно учитывать не только моменты замкнутых орбит, но и собственные магнитные моменты самих электронов.

Эффект Холла



Магнитное поле действует также и на те электроны внутри проводников, упорядоченное движение которых образует ток.

Американский ученый Э.Холл обнаружил, что в проводнике, помещенном в магнитное поле, возникает разность потенциалов (поперечная) в направлении, перпендикулярном вектору магнитной индукции **B** и току **I**, вследствие действия силы Лоренца на заряды, движущиеся в этом проводнике.

Под действием силы Лоренца $F=e\cdot V\cdot B$ электроны будут описывать криволинейную траекторию.

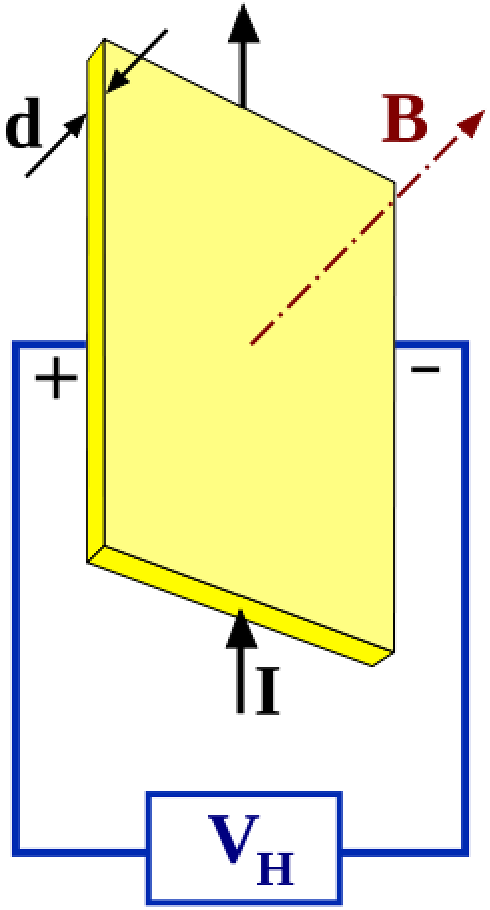
На верхней поверхности проводника появится избыточное количество электронов, и она зарядится отрицательно. Между верхней и нижней поверхностями появится разность потенциалов -***эффект Холла***

Напряженность электрического поля между этими поверхностями E_x перпендикулярна к $V\cdot$ и поэтому на электрон действует сила $F= e\cdot E_x$, направленная против силы Лоренца.

В установившемся состоянии должно соблюдаться равенство

$$e\cdot E_x = e\cdot V\cdot B$$

сила тока через проводник $I = n \cdot e \cdot V \cdot S$ $S = a \cdot b$



Тогда напряженность поля

$$E_x = \frac{1}{n \cdot e} \cdot B \cdot \frac{I}{S}$$

а разность потенциалов между верхней и нижней поверхностями равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_x b = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{I \cdot B}{a}$$

$$\frac{1}{n \cdot e} = R$$

коэффициент Холла.

измерение коэффициента Холла R позволяет определить характер проводимости (*электронный*- постоянная Холла имеет отрицательное значение или *дырочный* - постоянная Холла имеет положительное значение), а также концентрацию носителей тока *n*.

Электромагнитные левитаторы

Магнитная левитация — технология, метод подъёма объекта с помощью одного только магнитного поля. Магнитное давление используется для компенсации ускорения свободного падения или любых других ускорений.

Теорема Ирншоу для электростатического поля: Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания никакие другие силы не действуют.