

**К.К. Боярский, А.В. Смирнов**

**МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 2.  
ЭНЕРГИЯ, ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЯ,  
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**



**Санкт-Петербург  
2021**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**К.К. Боярский, А.В. Смирнов**  
**МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 2. ЭНЕРГИЯ,  
ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЯ, ОСНОВЫ  
ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИТМО

по направлению подготовки 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04,  
10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.05,  
13.03.02, 15.03.06, 16.03.01., 18.03.02, 19.03.01., 24.03.02, 27.03.04

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Санкт-Петербург**  
**2021**

Боярский К.К., Смирнов А.В., МЕХАНИКА. Часть 2. ЭНЕРГИЯ, ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЯ, ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ– СПб: Университет ИТМО, 2021. – 60 с.

Рецензент(ы):

Крылов И.Р., кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент, физический факультет СПбГУ;

Вторая часть пособия К.К. Боярский, А.В. Смирнов, О.Б. Прищепенок "Механика часть 1. Кинематика, динамика". В рамках курса общей физики рассмотрены вопросы таких разделов механики как работа и энергия, основы теории столкновений, динамика вращения твердого тела, основы специальной теории относительности.



Университет ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, ведущий вуз России в области информационных, фотонных и биохимических технологий. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию: ICPC (единственный в мире семикратный чемпион), Google Code Jam, Facebook Hacker Cup, Яндекс.Алгоритм, Russian Code Cup, Topcoder Open и др. Приоритетные направления: IT, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Входит в ТОП-100 по направлению «Автоматизация и управление» Шанхайского предметного рейтинга (ARWU) и занимает 74 место в мире в британском предметном рейтинге QS по компьютерным наукам (Computer Science and Information Systems). С 2013 по 2020 гг. — лидер Проекта 5-100.

© Университет ИТМО, 2021

© Боярский К.К., Смирнов А.В., 2021

## Оглавление

7	Энергия .....	4
7.1	Работа и мощность.....	4
7.2	Кинетическая энергия .....	9
7.3	Потенциальная энергия .....	11
7.4	Движение в поле тяготения .....	17
7.5	Теория соударений .....	19
8	Динамика вращения .....	25
8.1	Момент импульса и момент силы относительно центра ..	25
8.2	Законы изменения и сохранения момента импульса материальной точки относительно центра.....	26
8.3	Законы изменения и сохранения момента импульса системы МТ .....	28
8.4	Момент импульса МТ и момент силы относительно оси	30
8.5	Пара сил. Момент пары сил .....	32
8.6	Момент импульса АТТ, вращающейся относительно неподвижной оси. Момент инерции тела относительно оси.....	32
8.7	Общие свойства момента инерции .....	33
8.8	Формулы центральных моментов инерции некоторых тел 34	
8.9	Мощность и работасилы при вращении телавокруг неподвижной оси.....	36
8.10	Кинетическая энергия вращающегося тела вокруг неподвижной оси и тела, совершающего плоское движение .....	38
9	Основы теории относительности .....	42
9.1	Предпосылки теории относительности .....	42
9.2	Основы специальной теории относительности.....	45
9.3	Преобразования Лоренца .....	50
9.4	Релятивистская динамика .....	57
9.5	Экспериментальные подтверждения теории относительности.....	59

## 7 Энергия

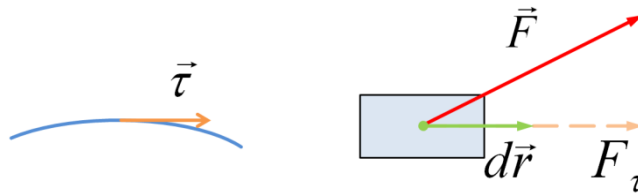
Все перемены, в натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько у одного тела отнимается, столько присовокупится к другому... Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения: ибо тело, движущее своею силою другое, столько же оные у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает.

*М. В. Ломоносов*

### 7.1 Работа и мощность

#### 7.1.1 Работа

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по какой-то траектории под действием силы  $\vec{F}$ . В процессе движения эта сила может меняться по величине и направлению (рис. 7.1).



**Рис. 7.1.** К определению работы

Величина

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F_{\tau} ds \quad (7.1)$$

называется работой силы  $\vec{F}$  на элементарном перемещении  $d\vec{r}$ ,  $ds$  — элемент пути, пройденного телом под действием силы<sup>1</sup>.

Интегрируя (7.1) по всему пути от точки 1 до точки 2, найдем полную работу, совершенную силой  $\vec{F}$ :

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_{\tau} ds. \quad (7.2)$$

Отметим, что понятие механической работы не совпадает с поня-

---

<sup>1</sup> Элементарная работа обозначается  $\delta A$  поскольку с математической точки зрения это не полный дифференциал. В противном случае было бы  $dA = \vec{F}d\vec{r} + \vec{r}d\vec{F}$ .

тием работы в бытовом смысле, когда всякое приложение силы ассоциируется с работой. На рис. 7.2, *а* титан прикладывает силу, но механическая работа не совершается, поскольку нет перемещения. На рис. 7.2, *б* результирующая сила, приложенная к телеге, равна нулю. На рис. 7.2, *в* есть и сила, и перемещение, но сила, приложенная к молоту, перпендикулярна перемещению, следовательно, и в этом случае механическая работа не совершается.

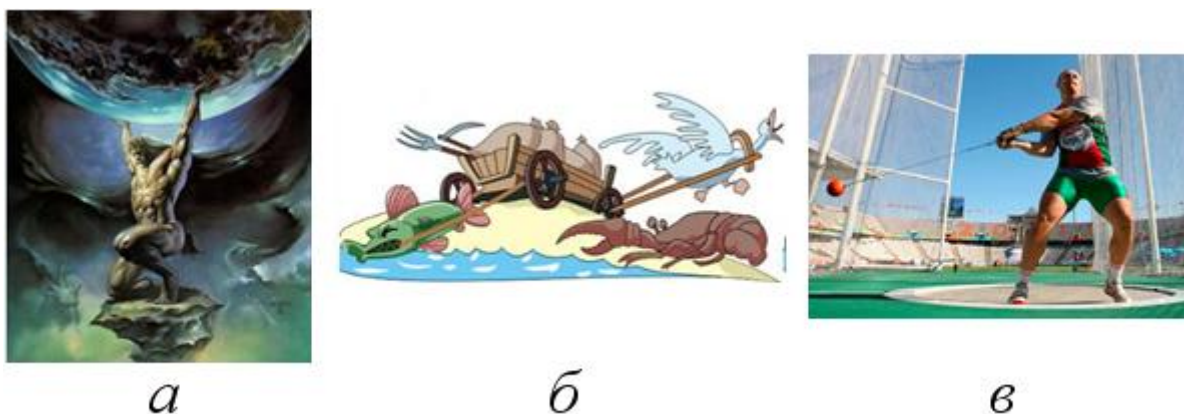


Рис. 7.2. Когда работа равна нулю

### 7.1.2 Примеры вычисления работы

#### Работа по растяжению пружины

Рассмотрим работу, совершаемую при растяжении пружины (рис. 7.3). Направление деформации пружины совпадает с направлением действия внешней силы  $\vec{F}_{\text{вн}}$ , так что  $\vec{F}_{\text{вн}} \cdot d\vec{r} = F_{\text{вн}} dx$ .

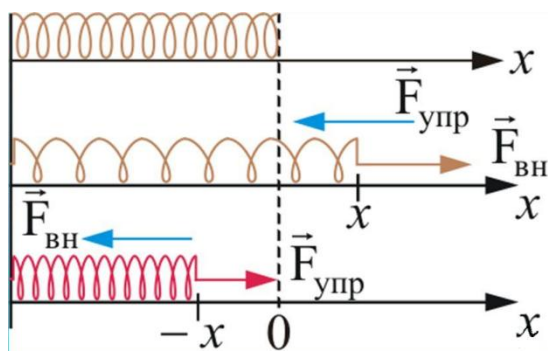


Рис. 7.3. Определение работы силы упругости

Предполагая, что пружина подчиняется закону Гука, имеем  $F_{\text{вн}} = kx$  и

$$A_{\text{вн}} = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} \quad (7.3)$$

Заметим, что направление действия силы упругости пружины  $\vec{F}_{\text{упр}}$  противоположно направлению деформации, следовательно  $A_{\text{упр}} = -A_{\text{вн}} = -\frac{kx^2}{2}$ .

### Работа силы тяжести

Направим ось  $Z$  вертикально вверх (рис. 7.4). Сила тяжести  $P = mg$  направлена вниз, следовательно,  $\vec{P} \cdot d\vec{r} = -mgdz$ .

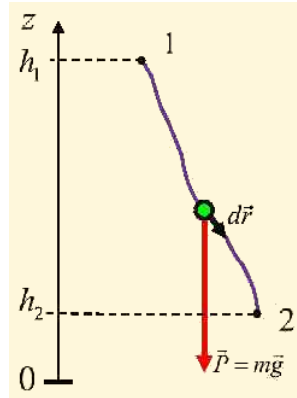


Рис. 7.4. Определение работы силы тяжести

$$A = -\int_{h_1}^{h_2} mgdz = mg(h_1 - h_2) \quad (7.4)$$

Из формулы (7.4) видно, что работа силы тяжести не зависит от формы и длины пути между точками 1 и 2, а определяется только разностью высот этих точек.

### Работа силы тяготения

Рассмотрим тело, движущееся в поле силы тяготения  $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  (рис. 7.5).

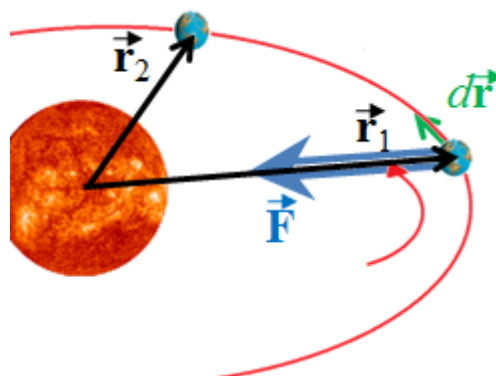


Рис. 7.5. Определение работы силы тяготения

Элементарная работа этой силы на перемещении  $d\vec{r}$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr.$$

Следовательно, полная работа при перемещении тела из точки 1 в точку 2 равна

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (7.5)$$

Таким образом, работа силы тяготения также не зависит от формы и длины пути между точками 1 и 2, а определяется только разностью расстояний этих точек от центра тяготения.

### 7.1.3 Мощность

Мощность — физическая величина, характеризующая скорость совершения работы. Если за время  $dt$  сила  $\vec{F}$  совершает работу  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ , то мощность этой силы равна

$$N = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (7.6)$$

Работу этой силы можно найти как

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N dt. \quad (7.7)$$

### 7.1.4 Единицы измерения работы и мощности

В системе СИ единицей работы является работа, совершаемая силой в 1 Ньютон, действующей в направлении перемещения на пути 1 м. Эта единица получила название **джоуль** (Дж) в честь английского физика, внесшего значительный вклад в изучение тепловых и электрических явлений.

Единицей мощности в СИ является **ватт** (Вт), равный джоулю в секунду. Единица мощности была названа по фамилии выдающегося шотландского инженера и изобретателя Дж. Уатта в 1882 г. Это был первый в истории техники случай присвоения имени собственного единице измерения.

Однако для работы и мощности существует ряд внесистемных единиц измерения, которые широко



Джеймс Джоуль  
1818– 1889



Джеймс Уатт  
1736– 1819



используются в определенных областях физики и техники.

### **Киловатт-час**

Киловатт-час (кВт·ч) равен количеству энергии или работы, потребляемой (производимой) устройством мощностью один киловатт в течение одного часа. Поскольку  $1 \text{ Вт}\cdot\text{с} = 1 \text{ Дж}$ ,  $1 \text{ кВт}\cdot\text{ч} = 3,6 \text{ МДж}$ . Используется преимущественно для измерения выработки и потребления электроэнергии.

### **Калория**

Калория (от латинского *calor* — тепло) как единица теплоты была предложена еще в середине XVIII века. Калория — это количество теплоты, необходимое для нагревания 1 грамма воды на 1 градус Цельсия при стандартном атмосферном давлении  $101325 \text{ Па}$ .  $1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж}$ . Используется в теплоэнергетике, коммунальном хозяйстве. Кроме того, в калориях измеряют «энергетическую ценность» пищевых продуктов.

### **Электронвольт**

Для задач атомной и ядерной физики, молекулярной биологии джоуль оказывается слишком крупной единицей измерения работы и энергии. Чаще используется электронвольт (эВ). Один электронвольт равен энергии, необходимой для переноса элементарного заряда в электростатическом поле между точками с разницей потенциалов в 1 вольт. Так как элементарный заряд равен  $1,6\cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , то  $1 \text{ эВ} = 1,6\cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

### **Другие единицы**

В физике элементарных частиц часто оказывается удобным выражать в электронвольтах не только энергию  $E$ , но и массу  $m$  частиц. Основанием для этого служит соотношение теории относительности  $E = mc^2$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Таким образом, оказывается, что атомная единица массы  $1 \text{ а. е. м.} = 931 \text{ МэВ}$ , а масса электрона  $m_e = 0,511 \text{ МэВ}$ .

Температура, которая является мерой средней кинетической энергии частиц, тоже иногда выражается в электронвольтах, исходя из соотношения температуры и энергии частиц в одноатомном идеальном газе  $E_{\text{кин}} = \frac{3}{2} kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. В температурных единицах  $1 \text{ эВ}$  соответствует  $1,16\cdot 10^4$  кельвин.

В электронвольтах выражают энергию квантов электромагнитно-

го излучения (фотонов). По формуле Планка энергия фотона с частотой  $\nu E = h\nu$ , где  $h$  — постоянная Планка. Отсюда находим, что частоте 1 ТГц соответствует энергия 4,13 мэВ.

### Лошадиная сила

Термин «лошадиная сила» ввел Уатт, чтобы показать, работу скольких лошадей способны заменить его паровые машины. В настоящее время так называется внесистемная единица мощности, 1 л. с. = 735,5 Вт. Единица часто используется для измерения мощности двигателей внутреннего сгорания, при расчете транспортного налога и т. д.

## 7.2 Кинетическая энергия

### 7.2.1 Определение кинетической энергии

Рассмотрим элементарную работу, совершаемую силой  $\vec{F}$ . Учитывая, что по второму закону Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ , формулу (7.2) можно переписать в виде

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

При движении по криволинейной траектории скорость материальной точки меняется как по величине, так и по направлению (рис. 7.6, а). Скалярное произведение  $\vec{v} \cdot d\vec{v}$  представляет собой произведение модуля скорости на величину приращения этого модуля, т. е.  $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v dv$  (рис. 7.6, б).

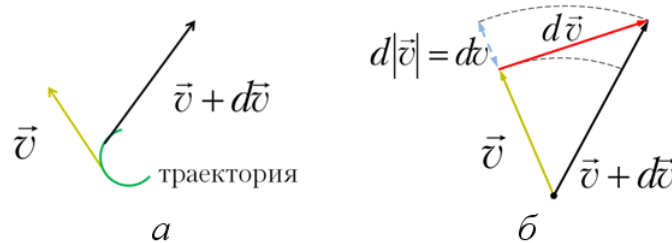


Рис. 7.6. К определению кинетической энергии

Следовательно,

$$A = m \int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_1^2 v dv = \frac{1}{2} m \int_1^2 d(v^2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (7.8)$$

Отсюда видно, что работа идет на приращение величины

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (7.9)$$

которая называется кинетической энергией.

*Работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки.*

Эта теорема легко может быть обобщена на случай системы материальных точек:

*Работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии системы.*

Отметим, что приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил, действующих в системе.

Кинетическая энергия системы — величина аддитивная, она равна сумме кинетических энергий отдельных частей системы, независимо от того, взаимодействуют ли они друг с другом.

В механике часто оказывается удобным выражать кинетическую энергию не через скорость, а через импульс частиц. Учитывая, что  $p = mv$ , формулу (7.9) можно переписать как

$$T = \frac{p^2}{2m}. \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Кинетическая энергия в Ц-системе

Рассмотрим систему, состоящую из материальных точек, каждая из которых имеет массу  $m_i$  и движется относительно некоторой системы отсчета со скоростью  $\vec{v}_i$ . Центр масс такой системы движется со скоростью (см. формулу 4.24 первой части настоящего пособия)

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad (7.11)$$

где  $\vec{P}$  — полный импульс системы.

Скорость каждой точки в исходной системе отсчета связана со скоростью  $\tilde{\vec{v}}$  в системе центра масс (Ц-системе) соотношением

$$\vec{v}_i = \tilde{\vec{v}}_i + \vec{V}_c \quad (7.12)$$

Отсюда для кинетической энергии получаем:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\tilde{\mathbf{v}}_i + \vec{V}_c)^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \tilde{v}_i^2}{2} + \vec{V}_c \cdot \sum_i m_i \tilde{\mathbf{v}}_i + \sum_i \frac{m_i V_c^2}{2}. \quad (7.13)$$

Первое слагаемое в (7.13) представляет собой кинетическую энергию движения точек в Ц-системе. Второе слагаемое равно нулю по определению центра масс. Третье слагаемое — кинетическая энергия движения системы как целого в исходной системе отсчета. Таким образом, равенство (7.13) можно переписать в виде

$$T = \tilde{T} + \frac{MV_c^2}{2}, \quad (7.14)$$

где  $M$  — полная масса всех точек.

Это соотношение выражает **теорему Кёнига**: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии движения центра масс системы и кинетической энергии движения точек относительно центра масс. Очевидно, что кинетическая энергия системы частиц минимальна в Ц-системе.

## 7.3 Потенциальная энергия

### 7.3.1 Консервативные силы

Существует большой класс стационарных, т. е. не зависящих от времени, сил, обладающих общим свойством: работа которых не зависит от формы пути, по которому перемещается тело, а определяется только начальным или конечным положением тела 1 и 2 (рис. 7.6). Такие силы называются **консервативными**.

Если работа  $A_{1a2} = A_{1b2}$ , то очевидно, что при перемещении тела по замкнутой траектории  $A_{1a2b1}$  работа окажется равной нулю. Это позволяет дать другое определение: консервативными являются силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Силовое поле, в котором действуют только консервативные силы, называется **потенциальным**.

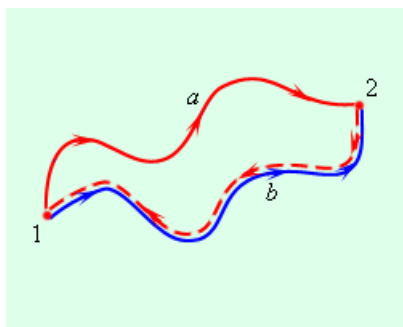


Рис. 7.7. К определению консервативных сил

Важным примером консервативных сил являются **центральные силы**. Это силы, в любой точке пространства направленные вдоль прямой, проходящей через одну и ту же точку, называемую силовым центром, и зависящие только от расстояния до этого центра (рис. 7.8).

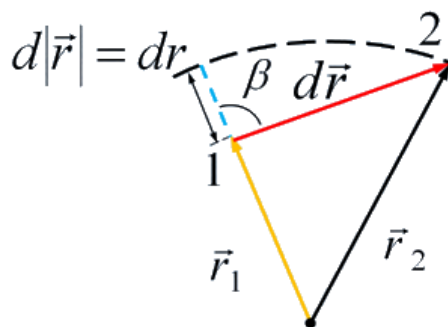


Рис. 7.8. Работа центральной силы

Действительно, центральную силу можно представить в виде

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Элементарная работа такой силы равна

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \pm F(r) dr,$$

а работа на конечном участке траектории

$$A = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr.$$

### 7.3.2 Неконсервативные силы

К неконсервативным относятся прежде всего **диссипативные** силы, в результате действия которых механическая энергия системы убывает (диссипирует), переходя в немеханические формы, обычно в теплоту.

Примером диссипативных сил являются силы трения. Вне зави-

симости от того, это силы вязкого трения (зависят от скорости частицы) или сухого трения (не зависят от скорости), они всегда направлены против перемещения. Следовательно, работа диссипативных сил на любой траектории, в том числе и на замкнутой, отрицательна.

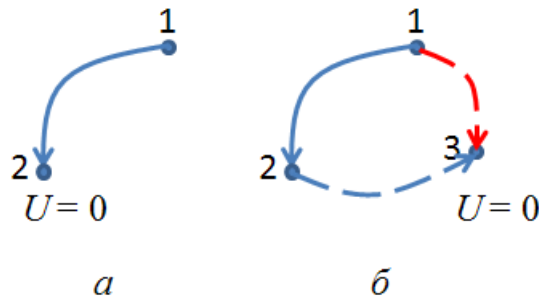
Неконсервативные силы могут и не быть связаны с диссипацией энергии. Например, работа силы Лоренца, действующей на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле, или центростремительной силы при движении по дуге окружности, равна нулю всегда, а не только при перемещении по замкнутой траектории.

### 7.3.3 Потенциальная энергия

Так как работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений тела, то можно ввести скалярную величину, определяющая положение тел, убыль которой равна работе:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{r}} = U_1 - U_2 = -\Delta U \quad (7.15)$$

Величина  $U$  называется **потенциальной энергией**. Соответственно поле консервативных сил называется потенциальным полем.



**Рис. 7.9.** Определение потенциальной энергии

Рассмотрим потенциальную энергию материальной точки, перемещающейся в потенциальном поле из точки 1 в точку 2 (рис. 7.9, а). Примем, что потенциальная энергия в точке 2 равна нулю. Тогда потенциальная энергия в точке 1  $U_1 = A_{12}$ .

Предположим теперь, что потенциальная энергия равна нулю в точке 3. Тогда  $U'_1 = A_{13} = A_{123} = A_{12} + A_{23} = U_1 + A_{23}$ . Работа  $A_{23}$  постоянна, она не зависит от перемещения рассматриваемой системы и определяется только выбором точек нулевого значения потенциальной энергии. Таким образом,

$$U' = U + \text{const}, \quad (7.16)$$

т. е. потенциальная энергия определена с точностью до аддитивной

постоянной. Это не приводит к каким-либо противоречиям, поскольку во все соотношения входит разность значений  $U$ .

Рассмотрим теперь работу сил взаимодействия двух материальных точек. По третьему закону Ньютона,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , следовательно,

$$\delta A = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12} (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2).$$

Величина в скобках представляет собой перемещение частиц друг относительно друга, а эта величина не зависит от выбора системы отсчета. Обобщая этот результат на систему частиц, можно сделать вывод, что для этой системы можно определить общую потенциальную энергию  $U$  как некоторую функцию, зависящую только от координат частиц (т. е. от конфигурации системы). Убыль этой величины равна суммарной работе всех консервативных сил, действующих в системе.

Потенциальная энергия — величина неаддитивная. Потенциальная энергия системы как целого равна сумме энергий отдельных частей и энергий взаимодействия этих частей между собой:

$$U = \sum_i U_i + \sum_{i \neq k} U_{ik}.$$

Из формул для вычисления работы (7.3) – (7.5) находим потенциальную энергию.

- В поле упругой силы:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (7.17)$$

Логично считать, что  $U = 0$  для нерастянутой пружины, так что аддитивная постоянная равна нулю.

- В поле однородной силы тяжести

$$U = mgh, \quad (7.18)$$

Здесь высота может отсчитываться от любого удобного уровня: уровня моря, уровня пола на 12-м этаже и т. д.

### 7.3.4 Полная механическая энергия

Если в системе частиц действуют только консервативные силы, то работа этих сил, с одной стороны, совершается за счет убыли потенциальной энергии, с другой стороны, эта работа идет на увеличение кинетической энергии:  $A_{\text{конс}} = \Delta T = -\Delta U$ .

Потенциальная и кинетическая энергия в процессе движения

системы могут переходить друг в друга. Однако полная энергия

$$E = T + U$$

остаётся постоянной. На основании этого можно сформулировать закон сохранения механической энергии:

***Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остаётся постоянной.***

Однако в общем случае изменение кинетической энергии определяется работой всех сил:

$$\Delta T = A_{\text{всех сил}} = A_{\text{внутр}} + A_{\text{внеш}} = A_{\text{внутр}}^{\text{конс}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дис}} + A_{\text{внеш}}$$

Последнее равенство можно переписать как

$$A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дис}} = \Delta T - A_{\text{внутр}}^{\text{конс}} = \Delta(T + U). \quad (7.19)$$

Таким образом, изменение полной механической энергии равно работе диссипативных сил в самой системе и сторонних сил.

Помимо механической энергии, различают и другие формы энергии: тепловую, электромагнитную, ядерную и т. д. Деление это во многом условно, так тепловая энергия на микроуровне представляет собой кинетическую энергию движущихся молекул, химическая энергия во многом обусловлена электромагнитным взаимодействием. На основе обобщения опытных фактов можно сформулировать общий закон сохранения энергии:

***Энергия не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую.***

### 7.3.5 Связь между потенциальной энергией и силой

Из соотношений (7.1) и (7.15) получаем, что изменение потенциальной энергии на элементарном перемещении  $d\vec{r}$  равно

$$-dU = \delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_{\tau} ds.$$

Отсюда

$$F_{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial s}. \quad (7.20)$$

Поскольку  $d\vec{r}$  можно взять в любом направлении, в том числе и



вдоль осей координат, из (7.20) следует, что

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (7.21)$$

В векторной форме (7.21) можно переписать как

$$\vec{\mathbf{F}} = -\left(\vec{\mathbf{i}} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}} \frac{\partial U}{\partial z}\right). \quad (7.22)$$

Выражение в скобках называется градиентом функции  $U(x, y, z)$  (см. математическое приложение, раздел 10).

$$\vec{\mathbf{F}} = -\text{grad}U = -\nabla U \quad (7.23)$$

Соотношение (7.23) показывает, что если система обладает потенциальной энергией  $U(x, y, z)$ , то результирующая сила направлена в сторону наискорейшего убывания энергии.

### 7.3.6 Движение в потенциальном поле

Рассмотрим частицу, находящуюся в одномерном потенциальном поле, которое имеет вид, показанный на рис. 7.10. Пусть частица находится в точке с координатой  $x_1$ , а ее полная энергия равна  $E_1$ . Поскольку в этой точке  $U = E_1$ , то кинетическая энергия  $T = 0$ , т. е. частица неподвижна. Производная  $dU/dx$  отрицательна, значит, на частицу в соответствии с (7.23) действует сила в положительном направлении оси  $X$ . Под действием этой силы частица «скатывается» в потенциальную яму, ее потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая растет.

После прохождения нижней точки потенциальной ямы  $x_4$   $dU/dx$  поменяет знак, что означает появление тормозящей силы. В точке  $x_2$  частица остановится, а затем начнет двигаться обратно. Таким образом, частица будет колебаться между точками  $x_1$  и  $x_2$ , «отражаясь» от стенок потенциальной ямы. Точки  $x_1$  и  $x_2$  называются **точками поворота**, а само движение в ограниченной области пространства — **финитным** движением. Область, доступная для частицы, определяется неравенствами  $T \geq 0$ ,  $E_1 \geq U$ . Очевидно, что при увеличении  $E_1$  эта область расширяется.

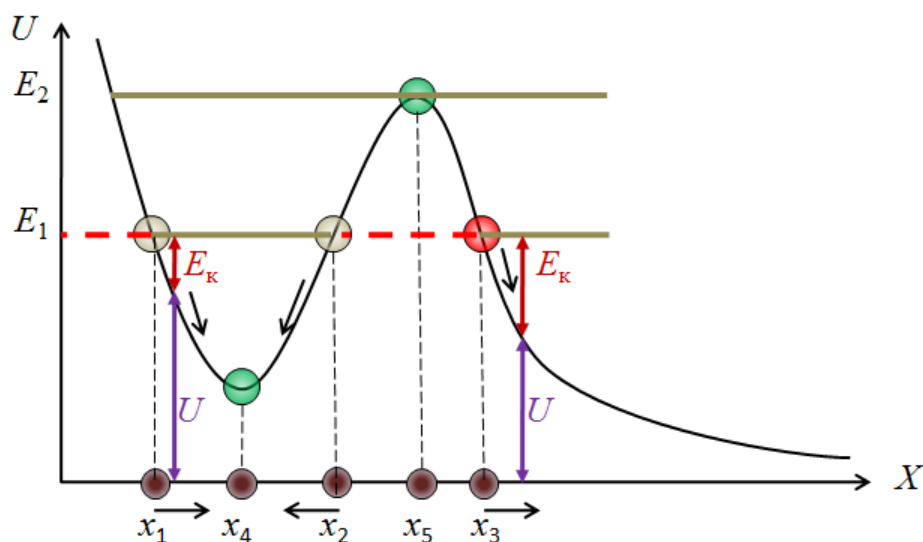


Рис. 7.10. Финитное и инфинитное движение

Если на точку действуют еще диссипативные силы, то полная механическая энергия будет уменьшаться, доступная область будет сужаться, пока частица не остановится в точке  $x_4$ . Это точка **устойчивого равновесия**.

В случае если частица изначально находится в точке  $x_3$ , т. е. вне потенциальной ямы, она будет разгоняться с неограниченным удалением от начального положения. Такое движение называется **инфинитным**.

Отметим, что если энергия частицы равна  $E_3$ , и она находится в точке  $x_5$ , то сила равна нулю и частица остается в состоянии покоя. Однако это **неустойчивое равновесие**, так как при любом смещении влево или вправо частица придет в движение.

## 7.4 Движение в поле тяготения

Движение спутника в поле силы тяготения планеты обсуждалось в первой части настоящего пособия (раздел 3.4.2). Рассмотрим теперь это движение с энергетической точки зрения.

Пусть спутник движется по круговой орбите радиусом  $r = R + h$  (рис. 7.11). На него действует гравитационная сила  $F = \frac{GMm}{r^2}$ . Поскольку это сила центральная, а значит, консервативная, можно ввести потенциальную энергию, исходя из соотношения

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = \left( G \frac{Mm}{r_2} - G \frac{Mm}{r_1} \right) = U_1 - U_2.$$

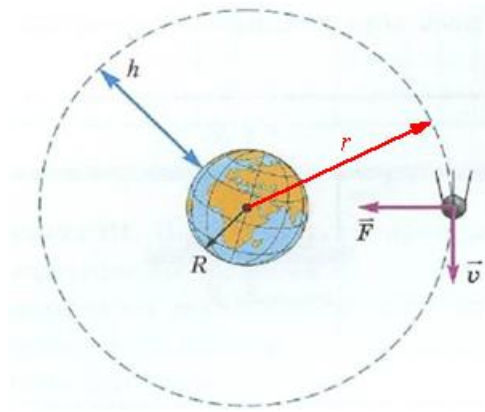


Рис. 7.11. Орбитальное движение

Обычно принимают, что  $U = 0$  для тел, удаленных на очень большое расстояние, т. е.  $U(r \rightarrow \infty) = 0$ . Тогда аддитивная постоянная в определении потенциальной энергии равна нулю, и

$$U = -GMm \frac{1}{r}. \quad (7.24)$$

Следовательно, потенциальная энергия притягивающихся тел отрицательна.

Величина

$$\Phi_{\text{гп}} = -\frac{GM}{r} \quad (7.25)$$

называется гравитационным потенциалом, таким образом, потенциальную энергию тела массой  $m$  в известном поле тяготения можно представить в виде

$$U = \Phi_{\text{гп}} m. \quad (7.26)$$

Учитывая, что на поверхности планеты ускорение силы тяжести  $g = \frac{GM}{R^2}$ , формулу (7.24) можно переписать в виде

$$U = -\frac{mgR^2}{r}. \quad (7.27)$$

С другой стороны, сила тяготения равна центростремительной силе, т. е.

$$mg \frac{R^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Отсюда для кинетической энергии находим

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR^2}{2r}. \quad (7.28)$$

Сравнивая (7.27) и (7.28), получаем

$$|U| = 2E_k, \quad (7.29)$$

при движении по орбите потенциальная энергия по модулю в два раза больше кинетической. Полная энергия  $E = T + U$  по модулю равна кинетической, но противоположна по знаку.

Найдем теперь скорость, которую необходимо придать физическому объекту, чтобы он преодолел гравитационное притяжение небесного тела и покинул его замкнутую орбиту. Так как на поверхности Земли  $U = -\frac{GMm}{R}$ , для ухода тела ему нужно, чтобы полная энергия по крайней мере равнялась нулю:

$$\frac{mv^2}{2} - mgR = 0.$$

Следовательно, скорость ухода, которая называется **второй космической скоростью**, равна

$$v_{II} = \sqrt{2gR}. \quad (7.30)$$

Как видно, эта скорость в  $\sqrt{2}$  раз больше первой космической скорости, которая определяет движение спутника по круговой орбите (формула 3.9 ч. I). Для Земли вторая космическая скорость равна 11,2 км/с.

## 7.5 Теория соударений

Щёлкни кобылу в нос — она махнет хвостом

*Козьма Прутков*

Столкновение тел — достаточно сложный процесс. Во время столкновения действуют консервативные и диссипативные силы различной природы, возбуждаются колебания и волны и т. д. На короткое время кинетическая энергия переходит в энергию упругой деформации и энергию теплового движения частиц, а затем совершается обратный переход энергии упругой деформации в кинетическую. Однако если нас интересуют не детали процесса соударения, а лишь его результат, то можно просто воспользоваться законами сохранения

полного импульса и полной энергии системы тел.

### 7.5.1 Абсолютно неупругий удар

При абсолютно неупругом ударе потенциальной энергии деформации не возникает, кинетическая энергия тел полностью или частично переходит в тепловую, после удара тела движутся как одно целое. Пусть шары с массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара движутся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , а после удара — с общей скоростью  $\vec{v}'$ . Тогда законы сохранения можно записать в виде

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}', \quad (7.31)$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{2} + Q. \quad (7.32)$$

Согласно теореме Кёнига (7.14), кинетическая энергия складывается из энергии движения системы как целого со скоростью центра масс и энергии движения частей системы относительно центра масс. В результате неупругого столкновения относительное движение частей системы прекращается, и соответствующая часть кинетической энергии «исчезает», т. е. переходит в немеханическую внутреннюю энергию (теплоту).

Рассмотрим неупругий удар в системе центра масс (Ц-системе). Пусть в лабораторной К-системе сталкивающиеся тела движутся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , а центр масс — со скоростью  $\vec{V}_c$ . Начальные скорости частиц в Ц-системе

$$\tilde{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_c = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

и

$$\tilde{\vec{v}}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_c = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}.$$

Импульсы частиц представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{p}}_1 &= \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \mu (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu \vec{v}_{\text{отн}}, \\ \tilde{\vec{p}}_2 &= \mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\tilde{\vec{p}}_1. \end{aligned}$$

Величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.33)$$

называется **приведенной массой** системы.

Таким образом, импульсы частиц в Ц-системе равны произведению приведенной массы на относительную скорость частиц и противоположны по направлению.

Кинетическая энергия в Ц-системе

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mu |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2}{2} = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2} \quad (7.34)$$

После столкновения обе частицы в Ц-системе покоятся, так что вся кинетическая энергия переходит в тепло.

Отметим, что приведенный анализ справедлив и в случае, когда сталкивающиеся тела не имеют шарообразной формы. Примером неупругого удара может служить попадание пули в кусок дерева или иное тело, подвешенное на веревках. Такое устройство называется **баллистическим маятником**. По его отклонению можно определить скорость пули.

Процессом, обратным неупругому удару, является распад тела, при котором часть внутренней энергии тела переходит в кинетическую энергию осколков. Это может быть выстрел из ружья, разрыв снаряда или деление ядра урана. Если происходит деление на две части, то из закона сохранения импульса следует, что скорости осколков и их энергии обратно пропорциональны массам.

### 7.5.2 Абсолютно упругий удар

В качестве модели возьмем столкновение двух шаров, на которые не действуют внешние силы. Рассмотрим вначале центральный удар, при котором до удара шары движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. При абсолютно упругом ударе внутренняя энергия частиц не меняется, а потому не меняется и кинетическая энергия системы. В Ц-системе до удара по-прежнему

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu\vec{v}_{\text{отн}}; \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 = -\tilde{\mathbf{p}}_1; \quad \tilde{T} = \frac{1}{2}\mu v_{\text{отн}}^2.$$

Выполняются законы сохранения импульса и кинетической энергии (на расстоянии тела друг с другом не взаимодействуют). Отсюда следует, что при столкновении импульс (и скорость) каждой частицы просто меняет знак:

$$\tilde{\mathbf{p}}'_i = -\tilde{\mathbf{p}}_i; \quad \tilde{\mathbf{v}}'_i = -\tilde{\mathbf{v}}_i. \quad (7.35)$$

В К-системе

$$\tilde{\mathbf{v}}'_i = \tilde{\mathbf{V}}_c + \tilde{\mathbf{v}}' = \tilde{\mathbf{V}}_c - \tilde{\mathbf{v}}_i = 2\tilde{\mathbf{V}}_c - \tilde{\mathbf{v}}_i. \quad (7.36)$$

Если массы частиц одинаковы, то и в К-системе при ударе частицы обмениваются скоростями.

### 7.5.3 Нецентральный удар шаров

Рассмотрим теперь нецентральный удар гладких абсолютно упругих шаров (рис. 7.12).

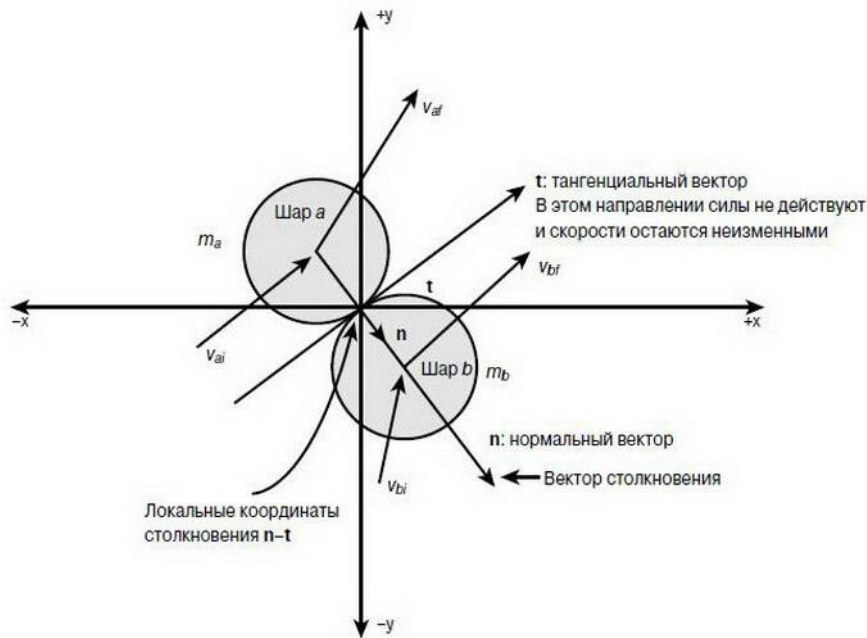


Рис. 7.12. Нецентральный удар

Введем в точке соприкосновения шаров локальную систему координат  $(\vec{n}, \vec{t})$ , в которой оси лежат в плоскости, проходящей через вектора скорости, одна ось направлена по нормали к поверхностям шаров, т. е. проходит через их центры, а другая— по касательной. Поскольку касательных сил при ударе не возникает (шары гладкие), то и соответствующие проекции скорости остаются постоянными. Тогда из законов сохранения следует, что нормальные проекции скоростей меняются так же, как скорости при центральном ударе. Отсюда следует, что импульс каждого из шаров в Ц-системе не меняется по величине:

$$\tilde{\mathbf{p}}'_i = \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (7.37)$$

Рассмотрим более подробно частный случай, когда в К-системе

частица с импульсом  $\vec{p}_1$  сталкивается с неподвижной частицей, т. е.  $\vec{p}_2 = 0$ . Закон сохранения импульса дает (см. рис. 7.12, а):

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2. \quad (7.38)$$

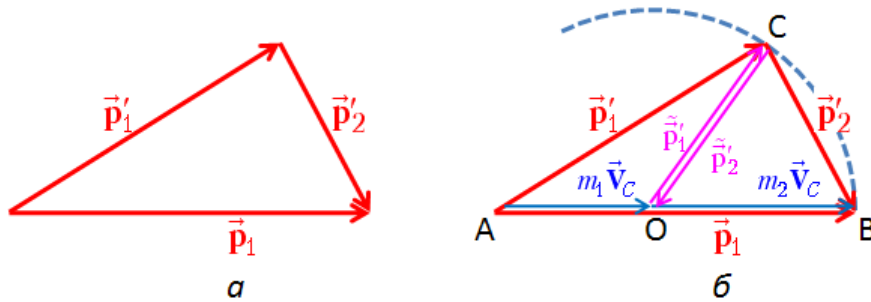


Рис. 7.12. Векторные диаграммы при нецентральной ударе

С другой стороны, учитывая соотношение между импульсами после удара в Ц-системе (7.37) и связь скоростей в Ц- и К- системах, имеем (рис. 7.12, б):

$$\begin{aligned} \vec{p}'_1 &= m_1 \mathbf{v}'_1 = m_1 (\vec{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}'_1) = m_1 \vec{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}'_1, \\ \vec{p}'_2 &= m_2 \mathbf{v}'_2 = m_2 (\vec{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}'_2) = m_2 \vec{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}'_2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Заметим, что точка С лежит на окружности радиуса  $\tilde{r}$ , с центром в точке О. Отношение длин отрезков АО и ОВ равно отношению масс сталкивающихся частиц  $m_1/m_2$ .

При  $m_1 < m_2$  точка А — начало вектора  $\vec{p}_1$  — находится внутри этой окружности (рис. 7.13, а). При этом возможные углы рассеяния налетающей частицы  $\theta_1$  лежат в диапазоне  $0 < \theta_1 \leq \pi$ , а угол разлета частиц  $\theta > \pi/2$ . Конкретные значения углов  $\theta$  и  $\theta_1$  зависят от прицельного параметра (расстояния между линией движения налетающей частицы и центром покоящейся), а также от характера взаимодействия частиц.

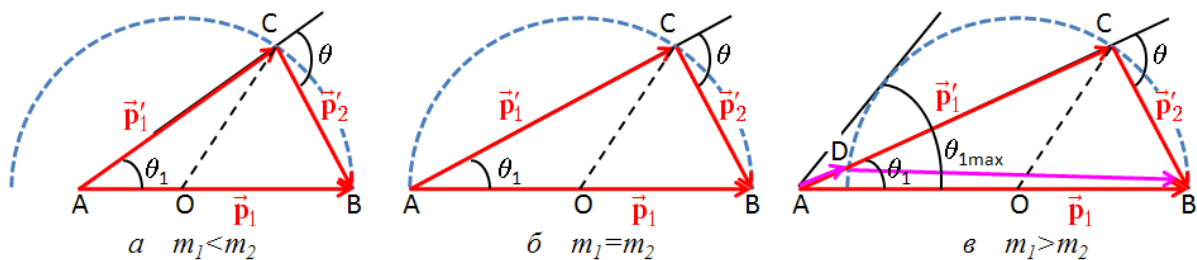


Рис. 7.13. Векторные диаграммы при различном соотношении масс



При  $m_1 = m_2$  точка А лежит на окружности (рис. 7.13, б). Возможные углы рассеяния лежат в диапазоне  $0 < \theta_1 \leq \pi/2$ , угол разлета частиц  $\theta = \pi/2$ , т. е. частицы разлетаются под прямым углом независимо от угла рассеяния.

Если  $m_1 > m_2$ , то точка А лежит вне окружности (рис. 7.13, в). Угол разлета  $\theta < \pi/2$ , а угол рассеяния  $0 < \theta_1 \leq \theta_{1\max}$ , где  $\theta_{1\max}$  — предельный угол рассеяния, определяемый соотношением  $\sin \theta_{1\max} = m_2/m_1$ . В этом случае импульсы частицы после рассеяния могут иметь два значения, соответствующих точкам С и D на рис. 7.13, в. Угол рассеяния в обоих случаях один и тот же, а углы разлета разные.

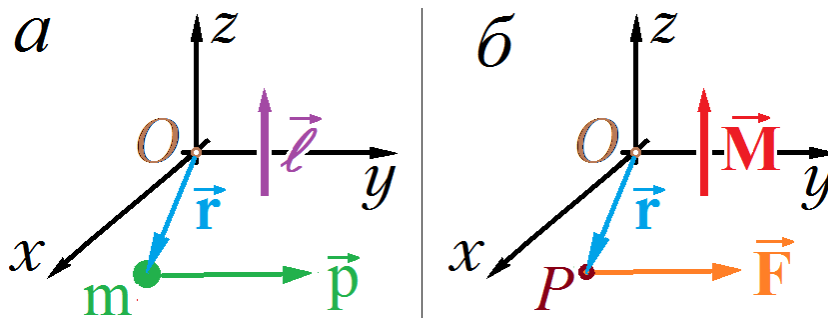
## 8 Динамика вращения

Для описания динамики вращения нам потребуются новые понятия, а именно: момент импульса и момент силы. Каждый из указанных моментов может быть двух видов: момент относительно центра и относительно оси.

### 8.1 Момент импульса и момент силы относительно центра

Пусть  $\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки  $m$ , движущейся с импульсом  $\vec{p}$  (см. рис.8.1а). Момент импульса  $\vec{\ell}$  этой материальной точки относительно центра (точки)  $O$  определим соотношением

$$\vec{\ell} = [\vec{r}; \vec{p}]. \quad (8.1)$$



**Рис. 8.1.** К определению моментов относительно центра  $O$ : а)  $\vec{\ell}$  – момент импульса материальной точки  $m$ ; б)  $\vec{M}$  – момент силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $P$ .

Момент импульса  $\vec{L}$  относительно центра  $O$  для системы из  $N$  материальных точек с радиус-векторами  $\vec{r}_i$  и импульсами  $\vec{p}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) складывается из моментов импульса отдельных точек:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i; \vec{p}_i]. \quad (8.2)$$

По аналогии с моментом импульса введем момент силы. Пусть сила  $\vec{F}$  приложена в точке  $P$  с радиус-вектором  $\vec{r}$  (см. рис.8.1б). Тогда момент силы относительно центра  $O$  – вектор

$$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}] \quad (8.3)$$

Если на некоторое тело действует несколько сил:  $\vec{F}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), то главным моментом сил называется векторная сумма моментов отдельных сил:

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum_{j=1}^n \vec{\mathbf{M}}_j = \sum_{j=1}^n [\vec{\mathbf{r}}_j; \vec{\mathbf{F}}_j]. \quad (8.4)$$

Здесь  $\vec{\mathbf{r}}_j$  – радиус-вектор точки приложения силы  $\vec{\mathbf{F}}_j$ .

## 8.2 Законы изменения и сохранения момента импульса материальной точки относительно центра

Пусть  $\vec{\mathbf{F}}$  – результирующая сила, приложенная к материальной точке  $m$ . Рассмотрим производную по времени от момента (8.5) импульса точки:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}; \vec{\mathbf{p}} \right] + \left[ \vec{\mathbf{r}}; \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \right] \quad (8.5)$$

Первый сомножитель в первом слагаемом правой части этого уравнения – скорость материальной точки:  $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}$ . Импульс – вектор, сонаправленный со скоростью. Векторное произведение сонаправленных векторов равно нулю, следовательно,

$$\left[ \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}; \vec{\mathbf{p}} \right] = [\vec{\mathbf{v}}; \vec{\mathbf{p}}] = 0 \quad (8.7)$$

По второму закону Ньютона  $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$ . Учитывая это и определение (8.8) момента силы, преобразуем уравнения (8.5) к виду

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \left[ \vec{\mathbf{r}}; \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \right] = [\vec{\mathbf{r}}; \vec{\mathbf{F}}] = \vec{\mathbf{M}} \quad (8.7)$$

Таким образом, *производная по времени от момента импульса точки равна моменту результирующей силы* (закон изменения момента импульса материальной точки).

В том случае, когда момент результирующей силы равен нулю, из закона (8.7) следует, что момент импульса точки должен сохраняться:

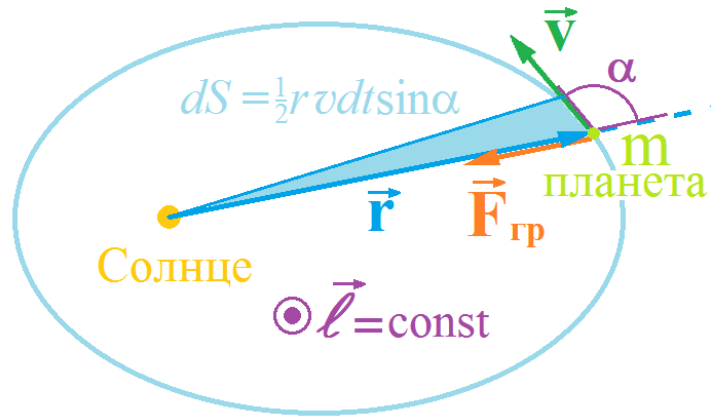
$$\vec{\mathbf{M}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\ell} = \text{const}. \quad (8.8)$$

Проиллюстрируем действие закона сохранения момента импульса (8.8) на примере движения какой-либо из планет Солнечной системы в гелиоцентрической системе отсчета (СО) (см. рис 8.2). Ос-

новой силой, действующей на планету, является сила  $\vec{F}_{\text{гр}}$  притяжения со стороны Солнца. Эта сила направлена противоположно радиус-вектору  $\vec{r}$  планеты, и момент  $\vec{M}_{\text{гр}} = [\vec{r}; \vec{F}_{\text{гр}}]$  этой силы относительно центра Солнца равен нулю. Следовательно, должен выполняться закон сохранения момента импульса планеты относительно центра Солнца:

$$\vec{\ell} = [\vec{r}; \vec{p}] = m[\vec{r}; \vec{v}] = \text{const}. \quad (8.9)$$

Здесь  $m$  – масса планеты;  $\vec{v}$  – скорость планеты.



**Рис. 8.2.** При движении планеты вокруг Солнца момент гравитационной силы  $\vec{M}_{\text{гр}} = [\vec{r}; \vec{F}_{\text{гр}}]$  относительно центра Солнца равен нулю. Вследствие этого вектор момента импульса планеты  $\vec{\ell} = m[\vec{r}; \vec{v}]$  сохраняется с течением времени.  $dS$  – площадь, заметаемая радиус-вектором планеты за время  $dt$ .

Соотношение (8.9) означает, что должно оставаться постоянным направление вектора  $\vec{\ell}$ . По определению векторного произведения вектор момента импульса направлен перпендикулярно плоскости, образованной векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  в данной точке траектории. Сохранение направления вектора  $\vec{\ell}$  означает, что вектор скорости планеты всегда лежит в одной плоскости. Приращение радиус-вектора за время  $dt$ :  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  сонаправлено с вектором скорости, поэтому все точки орбиты должны лежать этой же плоскости. Поскольку начало вектора  $\vec{r}$  – центр Солнца, эта плоскость должна проходить через центр Солнца.

Из соотношения(8.9) также следует, что сохраняется модуль

$$|\vec{\ell}| = |m[\vec{r}; \vec{v}]| = rmv \sin \alpha, \quad (8.10)$$

где  $\alpha$ - угол между радиус-вектором планеты  $\vec{r}$  и её скоростью  $\vec{v}$ .

Модуль момента импульса тесно связан с площадью, заметаемой радиус-вектором планеты в процессе ее движения. Действительно, за

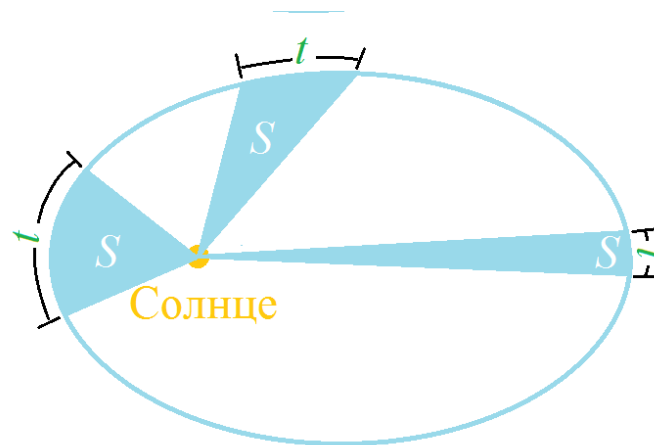
промежуток времени  $dt$  радиус-вектор заметает площадь  $dS$  треугольника, образованного радиус-вектором  $\vec{r}$  и модулем перемещения  $|d\vec{r}| = v dt$  (см. рис. 8.2), угол между сторонами этого треугольника равен  $180^\circ - \alpha$ . Поэтому

$$dS = \frac{1}{2} r v dt \sin \alpha. \quad (8.11)$$

Выражая произведение  $r v \sin \alpha$  через модуль момента импульса из соотношения (8.10) и учитывая  $|\vec{l}| = \text{const}$ , находим, что за время  $t$  радиус-вектор планеты заметает площадь

$$S(t) = \int_0^t dS = \int_0^t \frac{1}{2} r v \sin \alpha dt = \int_0^t \frac{|\vec{l}|}{2m} dt = \frac{|\vec{l}|}{2m} t. \quad (8.12)$$

Уравнение (8.12) обосновывает *второй закон Кеплера* (найденный на основе обобщения эмпирических данных о движении планет): *каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, заметает собой равные площади* (см. рис. 8.3.).



**Рис. 8.3.** Иллюстрация ко второму закону Кеплера: за равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает равные площади.

### 8.3 Законы изменения и сохранения момента импульса системы МТ

Моментом импульса  $\vec{L}$  относительно центра (точки)  $O$  для системы материальных точек (МТ) называется векторная сумма моментов отдельных МТ относительно  $O$ :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i; \vec{p}_i]. \quad (8.13)$$

Здесь индекс  $i = 1, 2, \dots, N$  нумерует МТ,  $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$  – радиус-векторы и импульсы отдельных МТ.

Продифференцировав уравнение (8.13), получим:

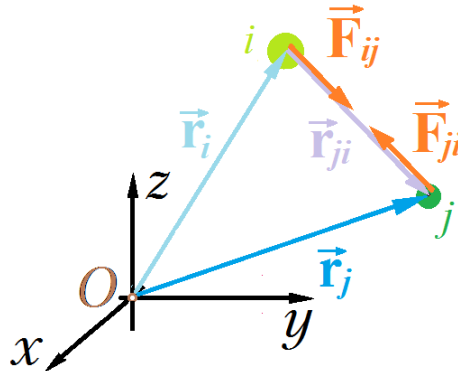
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{M}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(ex)} \quad (8.14)$$

Здесь  $\vec{M}_{ij}$  – момент силы, действующей на  $i$ -ю МТ со стороны  $j$ -й,  $\vec{M}_i^{(ex)}$  – момент результирующей внешних сил, действующий на  $i$ -ю МТ.

Двойная сумма  $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{M}_{ij}$  в уравнении (8.14) может быть разбита

на суммы пар моментов сил  $\vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji}$ , с которыми  $i$ -я и  $j$ -я МТ действуют друг на друга. Пара моментов  $\vec{M}_{ij}$  и  $\vec{M}_{ji}$  с учетом третьего закона Ньютона ( $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ) при сложении обращается в нуль:

$$\vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = [\vec{r}_i; \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j; \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_j - \vec{r}_i; \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_{ji}; \vec{F}_{ji}] = 0. \quad (8.15)$$



**Рис. 8.4.** Силы взаимодействия  $i$ -й и  $j$ -й МТ  $\vec{F}_{ij}$  и  $\vec{F}_{ji}$  коллинеарны вектору, соединяющему МТ.

Как правило, между МТ действуют центральные силы, в этом случае последнее векторное произведение в формуле (8.15) равно нулю, так как вектор  $\vec{F}_{ji}$  коллинеарен вектору  $\vec{r}_{ji}$ , соединяющему  $i$ -ю и  $j$ -ю МТ (см рис. 8.4.). Из (8.15) следует

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{M}}_{ij} = 0, \quad (8.16)$$

поэтому окончательно из уравнения (8.14) получаем

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{M}}_i^{(\text{ex})}. \quad (8.17)$$

Сумма моментов внешних сил в правой части равенства (8.17) называется главным моментом сил относительно центра (точки)  $O$ . Уравнение (8.17) выражает закон изменения момента импульса относительно центра (точки)  $O$  для системы МТ: скорость изменения момента импульса системы равна главному моменту сил.

В том случае, если главный момент сил отсутствует, из уравнения (8.17) следует закон сохранения момента импульса:

$$\vec{\mathbf{L}} = \text{const} \quad \text{при условии} \quad \vec{\mathbf{M}}^{(\text{ex})} = 0. \quad (8.18)$$

#### 8.4 Момент импульса МТ и момент силы относительно оси

Рассмотрим МТ  $m$ , движущуюся с импульсом  $\vec{\mathbf{p}}$  (см. рис. 8.5.). Моментом импульса  $l_z$  МТ относительно оси  $Oz$  (осевым моментом импульса МТ) называется проекция вектора момента импульса  $\vec{\ell}$  на ось  $Oz$ . Эта проекция может быть вычислена по формуле

$$l_z = (\vec{\ell})_z = \pm p_{\perp} d_p, \quad (8.19)$$

где  $p_{\perp}$  – проекция импульса на плоскость, перпендикулярную оси,  $d_p$  – расстояние от оси  $Oz$  до прямой, проходящей через МТ в направлении  $p_{\perp}$  (линии действия импульса  $p_{\perp}$ ). Расстояние  $d_p$  называется *плечом импульса*. Знак в формуле (8.19) определяется следующим образом: если вращению МТ вокруг оси  $Oz$  по правилу правого винта соответствует поступательное движение в направлении оси  $Oz$ , то выбирается знак «+», иначе выбирается знак «-».

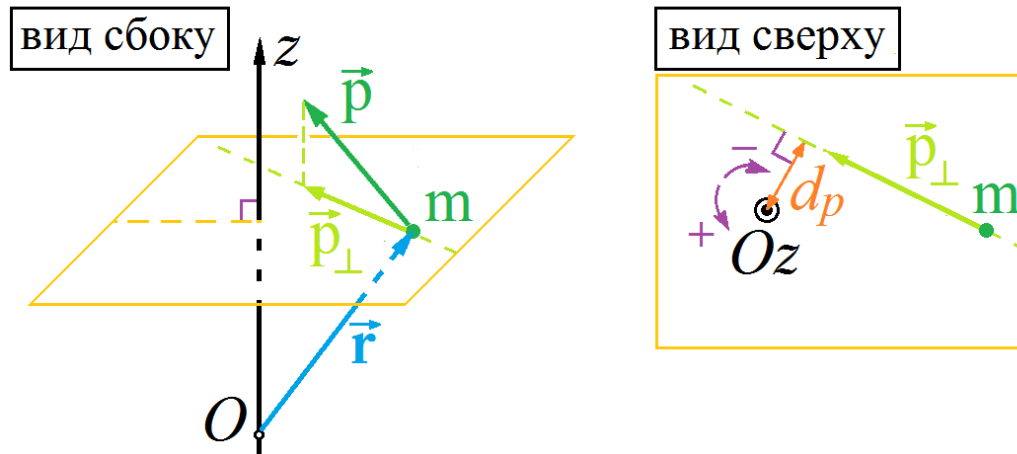


Рис. 8.5. К определению момента импульса  $M_T$  относительно оси  $Oz$ .

Аналогично вводится момент силы относительно оси (осевой момент силы). Для силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $A$ , момент силы относительно оси  $Oz$  (см. рис. 8.6.) вычисляется по формуле

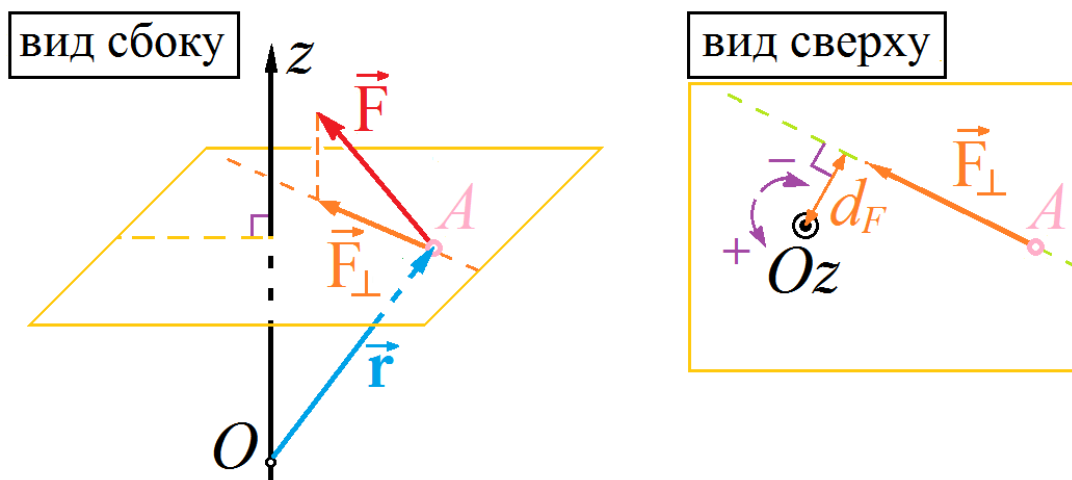


Рис. 8.6. К определению момента силы  $\vec{F}$  относительно оси  $Oz$ .

$$M_z = (\vec{M})_z = \pm F_{\perp} d_F, \quad (8.20)$$

где  $F_{\perp}$  – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси,  $d_F$  – расстояние от оси  $Oz$  до прямой, проходящей через точку  $A$  в направлении действия  $F_{\perp}$  (линии действия силы  $F_{\perp}$ ). Расстояние  $d_F$  называется *плечом силы*. Если вращению под действием силы  $F_{\perp}$  вокруг оси  $Oz$  по правилу правого винта соответствует поступательное движение в направлении оси  $Oz$ , то выбирается знак «+», иначе выбирается знак «-». Заметим, что перенос точки приложения силы вдоль линии действия силы не изменяет осевого момента силы.

Из закона изменения вектора момента импульса  $M_T$  (8.7) следует закон изменения осевого момента импульса:



$$\frac{dl_z}{dt} = M_z. \quad (8.21)$$

## 8.5 Пара сил. Момент пары сил

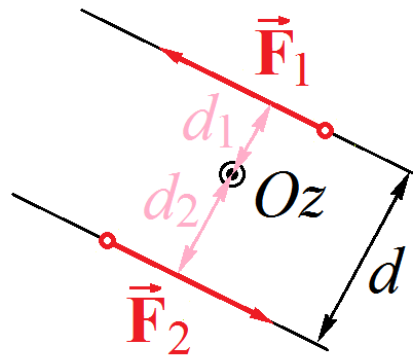
*Парой силой* называются две равные по модулю, противоположные по направлению силы, действующие вдоль параллельных, не совпадающих прямых. Рассмотрим суммарный момент пары сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  относительно некоторой оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости, в которой действуют силы (см. рис. 8.7.):

$$M_z = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = Fd. \quad (8.22)$$

где  $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$  – модуль каждой из сил,  $d_1$  и  $d_2$  – плечи сил по отдельности,  $d$  – расстояние между линиями действия сил. Расстояние  $d$  называется плечом пары сил.

Из формулы (8.22) следует, что момент пары сил *одинаков* относительно любой оси, перпендикулярной плоскости действия сил.

Пара сил замечательна тем, что векторная сумма сил пары равна нулю, т.е. под действием пары сил центр масс тела не будет получать ускорение. С другой стороны, пара сил, очевидно, будет приводить тело во вращательное движение.



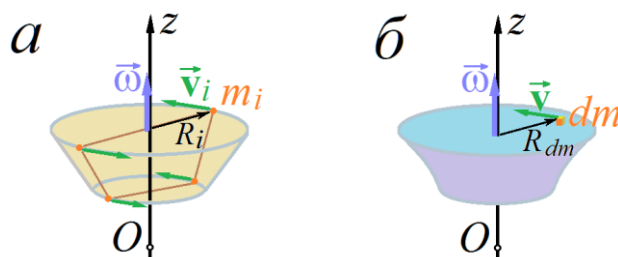
**Рис. 8.7.** К определению момента пары сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  относительно оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости действия сил.

## 8.6 Момент импульса АТТ, вращающейся относительно неподвижной оси. Момент инерции тела относительно оси

Рассмотрим абсолютно твердое тело (АТТ), вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Направление оси выберем совпадающим с вектором  $\vec{\omega}$  (см. рис. 8.8.). В качестве примера АТТ возьмем жесткую систему материальных точек с массами

$m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Обозначим расстояние материальной точки  $m_i$  от оси вращения  $R_i$  (рис. 8.8, а). Каждая такая точка имеет угловую скорость  $\omega$ , её линейная скорость  $V_i = \omega R_i$ , поэтому осевой момент импульса такой материальной точки

$$l_{iz} = m_i V_i R_i = m_i R_i^2 \omega. \quad (8.23)$$



**Рис. 8.8.** К определению момента импульса жесткой системы МТ (а) и сплошного тела (б) относительно оси  $Oz$ .

Осевой момент импульса всей системы складывается из моментов отдельных точек и оказывается пропорционален угловой скорости тела:

$$L_z = \sum_{i=1}^N l_{zi} = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = I \omega \sim \omega. \quad (8.24)$$

Коэффициент пропорциональности  $I$  между осевым моментом импульса тела и угловой скоростью называется *моментом инерции тела относительно оси  $Oz$* . Если АТТ можно представить как систему МТ, то, как видно из формулы (8.24), момент инерции вычисляется по формуле

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2. \quad (8.25)$$

Если АТТ рассматривать как сплошное тело, то роль отдельных точек играют элементарные массы  $dm$  (см. рис. 8.8, б), и формула (8.25) преобразуется к виду

$$I = \int dm R_{dm}^2, \quad (8.26)$$

где  $R_{dm}$  — расстояние элементарной массы  $dm$  от оси вращения  $Oz$ . Интегрирование здесь проводится по всем элементарным массам. Пример вычисления интеграла (8.26) будет представлен в п. 8.8.

## 8.7 Общие свойства момента инерции

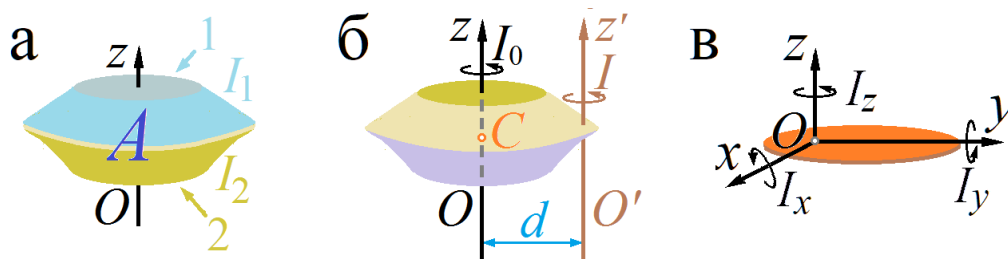
Исходя из формул (8.25) и (8.26), можно доказать следующие

общие свойства момента инерции тела.

- 1) *Момент инерции составного тела равен сумме моментов инерции его частей.* Например, для тела  $A$ , изображенного на рисунке 8.9, а, момент инерции

$$I = I_1 + I_2, \quad (8.27)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – моменты инерции частей тела 1 и 2, соответственно.



**Рис. 8.9.** Свойства момента инерции: а) момент инерции тела  $A$  складывается из моментов инерции его частей 1 и 2; б) момент инерции  $I_0$  относительно центральной оси  $Oz$  и момент инерции  $I$  относительно смещенной оси  $Oz'$  связаны соотношением (8.28); в) для плоского тела моменты инерции относительно координатных осей связаны соотношением (8.29).

- 2) *Теорема Штейнера: пусть момент инерции тела относительно оси  $Oz$ , проходящей через центр масс тела  $C$ , равен  $I_0$ , тогда момент инерции тела относительно оси  $Oz'$ , параллельной  $Oz$*

$$I = I_0 + md^2, \quad (8.28)$$

где  $m$  – масса тела,  $d$  – расстояние между осями (рис. 8.9, б).

- 3) *Для плоского тела, лежащего в плоскости  $xOy$  (см. рис. 8.9, в), моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  относительно трех координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  связаны соотношением*

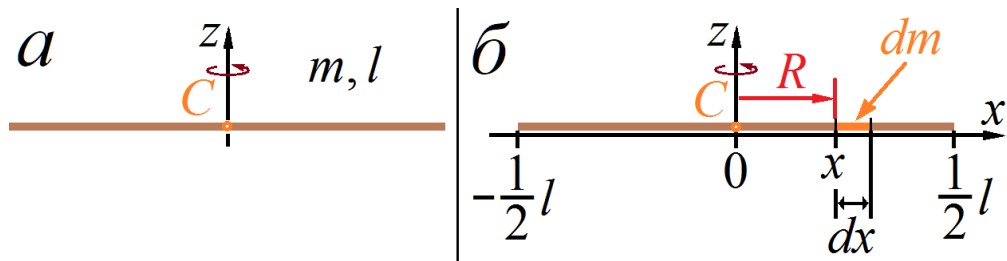
$$I_z = I_x + I_y. \quad (8.29)$$

## 8.8 Формулы центральных моментов инерции некоторых тел

Для вычисления момента инерции какого-либо тела по формуле (8.26) необходимо: ввести координаты, однозначно задающие положение каждой точки тела; выразить через эти координаты сомножители  $dm$  и  $R^2$  подынтегрального выражения в (8.26); вычислить интеграл в таких пределах, чтобы учесть все точки тела. Покажем, как это делается, на примере момента инерции тонкого однородного стержня массы  $m$  длины  $l$ , вращающегося вокруг оси  $z$  перпендикулярной

стержню и проходящей через его центр масс  $C$  (см. рис.8.10, а).

Для различения положений разных точек стержня достаточно одной координаты, например: координаты  $x$ , отсчитываемой вдоль стержня от его середины (см. рис. 8.10, б). Координаты всех точек стержня лежат в диапазоне от  $-\frac{1}{2}l$  до  $\frac{1}{2}l$ , эти границы дают пределы интегрирования в (8.26). Выразим сомножители  $dm$  и  $R^2$  подынтегрального выражения через координату  $x$  и известные параметры  $m$  и  $l$ .



**Рис. 8.10.** а) Тонкий однородный стержень массы  $m$  длиной  $l$ , вращающийся вокруг оси  $z$ ; б) выделение элементарной массы  $dm$  для вычисления момента инерции стержня относительно оси  $z$ .

Мысленно разобьём стержень на множество элементарных отрезков бесконечно малой длины  $dx$ . Роль элементарной массы  $dm$  в формуле (8.26) будет играть масса элементарного отрезка. Из-за однородности стержня масса  $dm$  составляет от всей массы  $m$  стержня такую же долю, какую составляет длина отрезка  $dx$  от всей длины  $l$ :

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l}, \quad (8.30)$$

поэтому

$$dm = m \frac{dx}{l}, \quad (8.31)$$

Используя выражение (8.31) и, учитывая, что  $R^2 = x^2$ , из формулы (8.26) получаем

$$I = \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \left( \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{12} ml^2. \quad (8.32)$$

Моменты инерции тела относительно осей, проходящих через центр масс тела, называются центральными моментами инерции. Ниже без вывода приведены формулы центральных моментов инерции относительно координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для тел, изображенных на рис. 8.11.

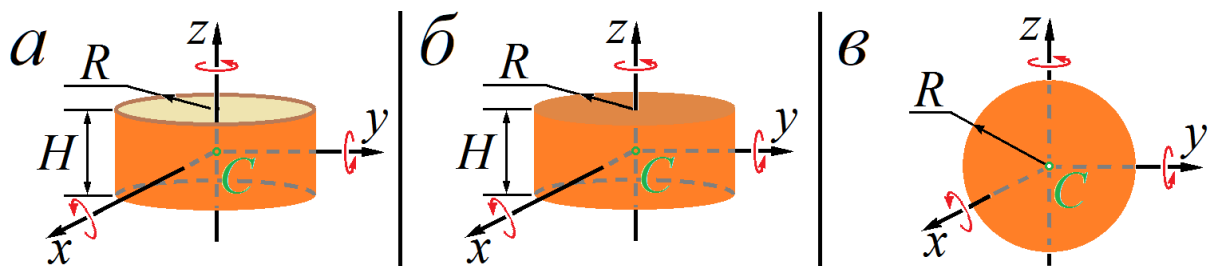


Рис. 8.11. Тела, для которых представлены формулы (8.33)– (8.35) центральных моментов инерции:

а) тонкостенная однородная трубка массы  $m$ , радиуса  $R$  и высоты  $H$ ;

б) однородный цилиндр массы  $m$ , радиуса  $R$  и высоты  $H$ ;

в) однородный шар массы  $m$ , радиуса  $R$

Для однородной тонкостенной трубки (рис. 8.11, а):

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2; I_z = mR^2. \quad (8.33)$$

Для однородного цилиндра (рис. 8.11б):

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2; I_z = \frac{1}{2}mR^2, \quad (8.34)$$

Для однородного шара (рис. 8.11в):

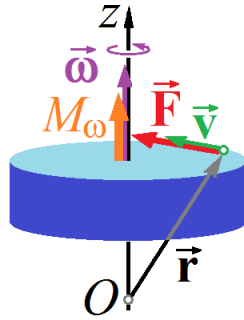
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2, \quad (8.35)$$

## 8.9 Мощность и работа силы при вращении тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим тело, которое вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг оси  $Oz$  (см. рис.8.12).

Пусть  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы  $\vec{F}$ . Скорость точки приложения силы  $\vec{v} = [\vec{\omega}; \vec{r}]$ . Следовательно, для мгновенной мощности силы получаем

$$P = (\vec{F}; \vec{v}) = (\vec{F}; [\vec{\omega}; \vec{r}]). \quad (8.36)$$



**Рис. 8.12.** К расчету мощности силы при вращении тела вокруг неподвижной оси  
 Смешанное произведение векторов  $(\vec{F}; [\vec{\omega}; \vec{r}])$  не изменяется при циклической перестановке сомножителей:

$$(\vec{F}; [\vec{\omega}; \vec{r}]) = (\vec{\omega}; [\vec{r}; \vec{F}]). \quad (8.37)$$

Второй сомножитель во втором смешанном произведении (8.37) представляет собой момент  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$ , поэтому из формулы (8.36) с учетом (8.37) получаем удобную формулу для мгновенной мощности силы при вращении:

$$P = (\vec{\omega}; \vec{M}) = \omega M_{\omega}, \quad (8.38)$$

где  $M_{\omega}$  – проекция вектора момента силы на направление вектора угловой скорости.

Работа силы за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  получается интегрированием мощности по времени в этом промежутке:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt. \quad (8.39)$$

Подставив выражение (8.38) в эту формулу, получим

$$A = \int_{t_1}^{t_2} M_{\omega} \omega dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{\omega} d\varphi. \quad (8.40)$$

Здесь учтено, что по определению угловой скорости приращение угловой координаты  $d\varphi = \omega dt$ .

В том случае, когда проекция момента  $M_{\omega}$  не изменяется с течением времени, соотношение (8.40) преобразуется к виду

$$A = M_{\omega} (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (8.41)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальное и конечное значение угловой координаты

## 8.10 Кинетическая энергия вращающегося тела вокруг неподвижной оси и тела, совершающего плоское движение

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Представим тело как систему МТ (см. рис. 8.8, *a*) с массами  $m_i$  и скоростями  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Скорость  $i$ -той точки определяется угловой скоростью тела и расстоянием  $R_i$  точки от оси вращения.

$$V_i = \omega R_i \quad (8.42)$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий отдельных МТ, и с учётом (8.42), получаем

$$W_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i R_i^2. \quad (8.43)$$

Сумма в последнем выражении представляет собой  $I$ - момент инерции (8.25) системы МТ относительно оси вращения, следовательно, *кинетическая энергия* (8.43) жесткой системы МТ *при вращении относительно неподвижной оси* вычисляется по формуле

$$W_{\text{кин}} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (8.44)$$

Если АТТ рассматривается как сплошное тело (см. рис. 8.8, *b*), то формула (8.44) сохраняет свой вид, но момент инерции нужно рассчитывать по формуле (8.26).

Получим формулу кинетической энергии для АТТ, совершающего плоское движение. Для этого, как и выше, рассмотрим жесткую систему МТ, изображающую АТТ. Плоское движение всегда можно представить в виде композиции поступательного движения со скоростью какой-либо точки тела и вращения вокруг оси, проходящей через эту точку. В качестве такой выделенной точки удобно выбрать центр масс системы.

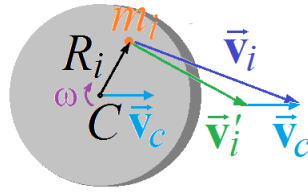
При разбиении движения на поступательное движение со скоростью центра масс и вращение вокруг оси, проходящей через центр масс, скорость  $i$ -той точки является векторной суммой скорости центра масс  $\vec{v}_C$  и линейной скорости, обусловленной вращением  $\vec{v}'_i$  (см. рис. 8.13):

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_C. \quad (8.45)$$

Квадрат модуля вектора равен скалярному произведению вектора

самого на себя. С учетом соотношения (8.45) для квадрата скорости находим

$$V_i^2 = (\vec{v}'_i + \vec{v}_C; \vec{v}'_i + \vec{v}_C) = V_i'^2 + 2(\vec{v}'_i; \vec{v}_C) + V_C^2. \quad (8.46)$$



**Рис. 8.13.** Сложение скоростей для точки тела, совершающего плоское движение:  $\vec{v}_C$  – скорость центра масс  $C$ ;  $\vec{v}'_i$  – линейной скорости, обусловленной вращением относительно оси, проходящей через точку  $C$ .

Поскольку кинетическая энергия системы равна сумме энергий всех точек, с учётом (8.46) получаем

$$W_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i V_i'^2}{2} + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}'_i; \vec{v}_C) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i V_C^2}{2}. \quad (8.47)$$

Первое слагаемое в этой сумме равно кинетической энергии тела в СО центра масс (в  $C$ -системе). В этой СО тело совершает вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, следовательно, это слагаемое вычисляется по формуле (8.44):

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i V_i'^2}{2} = \frac{I_C \omega^2}{2}. \quad (8.48)$$

Во втором слагаемом формулы (8.47) массу  $m_i$  внесем как сомножитель в первый множитель скалярного произведения и, воспользовавшись распределительным законом умножения для получившейся суммы скалярных произведений, получим

$$\sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}'_i; \vec{v}_C) = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}'_i; \vec{v}_C) = \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i; \vec{v}_C \right). \quad (8.49)$$

Первый сомножитель в этом произведении равен полному импульсу  $\vec{P}'_C$  тела в  $C$ -системе, который в свою очередь равен произведению массы  $m$  тела на скорость центра масс  $\vec{v}'_C$ . Но скорость центра масс  $\vec{v}'_C$  в  $C$ -системе равна нулю, поэтому второе слагаемое обращается в нуль:

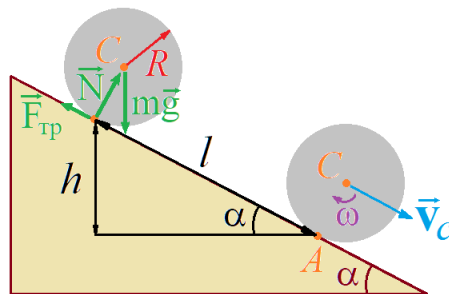
$$\left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i; \vec{v}_C \right) = (\vec{P}'_C; \vec{v}_C) = (m \vec{v}'_C; \vec{v}_C) = 0, \text{ т.к. } \vec{v}'_C = 0. \quad (8.50)$$



В последнем слагаемом формулы (8.47) множитель  $\frac{V_c^2}{2}$  как общий множитель выносится из суммы, а сумма масс всех точек складывается в общую массу  $m$  системы. С учетом этого и соотношений (8.48) – (8.50) получаем окончательную формулу кинетической энергии тела, совершающего плоское движение:

$$W_{\text{кин}} = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{mV_c^2}{2}. \quad (8.51)$$

Как пример эффективного применения формулы (8.51) рассмотрим следующую задачу. Однородный шар массой  $m$  и радиусом  $R$  скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом (см. рис. 8.14). Начальная скорость шара равна нулю. Необходимо найти скорость  $V_c$  центра шара к моменту, когда центр шара переместится на расстояние  $l$  от начала движения.



**Рис. 8.14.** Шар, скатываясь с наклонной плоскости без проскальзывания, проходит путь  $l$ . Необходимо определить скорость  $V_c$  центра шара.

Если пренебречь силой трения качения, то на шар действуют три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . При качении без проскальзывания точка  $A$ , в которой шар касается плоскости, имеет нулевую скорость. Поэтому мощности силы трения и силы нормальной реакции, приложенных в этой точке, равны нулю в течение всего времени движения, а, следовательно, обе эти силы не совершают работы. Единственная сила, совершающая работу, потенциальная сила – сила тяжести, и должен выполняться закон сохранения механической энергии.

Примем за начало отсчета потенциальной энергии конечное положение шара, тогда в начале движения шар имеет потенциальную энергию  $mgh$ , где  $h = l \sin \alpha$  – высота, на которую опустился центр шара. По закону сохранения механической энергии конечная кинетическая энергия, вычисляемая по формуле (8.51), должна равняться начальной потенциальной энергии:

$$\frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2} = mgl \sin \alpha. \quad (8.52)$$

Центральный момент инерции шара в формуле (8.52) вычисляется в соответствии с (8.35):

$$I_C = \frac{2}{5} mR^2. \quad (8.53)$$

Скорость точки  $A$  равна нулю. Следовательно, для этой точки линейная скорость, обусловленная собственным вращением шара, должна компенсировать скорость центра шара:  $\omega R = V_C$ . Отсюда угловая скорость шара

$$\omega = \frac{V_C}{R}. \quad (8.54)$$

Учитывая соотношения (8.53) и (8.54), из закона сохранения энергии (8.52) для скорости шара в конце пути находим

$$V_C = \sqrt{\frac{10}{7} gl \sin \alpha}. \quad (8.55)$$

Аналогично этой формуле можно получить формулы зависимости для скорости центра от пройденного расстояния для скатывающегося тонкого обруча:

$$V_C = \sqrt{gl \sin \alpha}, \quad (8.56)$$

и однородного цилиндра:

$$V_C = \sqrt{\frac{4}{3} gl \sin \alpha}. \quad (8.57)$$

При выводе формул (8.56) и (8.57) необходимо учесть вместо соотношения (8.53) соответствующие формулы для центральных моментов инерции обруча  $I_C = mR^2$  (см. формулу для величины  $I_z$  из соотношений (8.33)) и цилиндра  $I_C = \frac{1}{2} mR^2$  (см. величины  $I_z$  из соотношений (8.34)).

## 9 Основы теории относительности

Специальная теория относительности не является трудом одного человека, она возникла в результате совместных усилий группы великих исследователей — Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского.

*Макс Борн*

### 9.1 Предпосылки теории относительности

#### 9.1.1 Теория эфира

До второй половины XIX века физические теории строились на основе положений, введенных еще Галилеем и Ньютоном. В соответствии с ними пространство и время рассматриваются как некие «... *вместилища самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве — в смысле порядка положения. По самой своей сущности они суть места, приписывать же первичным местам движения нелепо*».

Постулировалось, что ход времени абсолютен, т. е. показания одинажды синхронизованных часов будут совпадать во всех точках пространства в любой момент времени. Также абсолютным является расстояние между любыми двумя точками. Наличие материальных тел и их движение не влияет на течение времени и свойства пространства.

Одним из важных вопросов, на которые должна была дать ответ физика, являлся вопрос о природе света. Еще в 1690 г. Х. Гюйгенс выдвинул волновую теорию, в соответствии с которой свет — это волны в эфире, некоей всепроникающей субстанции, заполняющей все пространство. В начале XIX века после работ Т. Юнга, О. Френеля и других ученых эта теория стала общепринятой. Была с достаточной точностью измерена скорость света в пустоте, которая оказалась около  $3 \cdot 10^8$  м/с. Френель доказал, что световые волны поперечны.

В 1864 г. Максвелл получил уравнения, из которых следовало, что свет представляет собой электромагнитные волны. Эфир стал пониматься как общий носитель света, электричества и магнетизма.

Однако попытки построить физическую теорию эфира наталкивались на серьезные трудности. Система отсчета, связанная с эфиром, считалась абсолютно неподвижной, что противоречило принципу относительности Галилея, в соответствии с которым все инерциальные

системы отсчета равноправны. Эфир, с одной стороны, должен был обладать свойствами твердого тела, в котором только и возможны поперечные колебания, а с другой — не препятствовать движению тел. Оставался невыясненным вопрос, увлекается ли эфир движущимися через него телами или остается неподвижным.

## 9.1.2 Эксперименты

### Звездная абберация

В 1725–1727 годах Дж. Брэдли открыл, что видимое положение звезд меняется в зависимости от направления движения звезды. Этот эффект получил название звездной абберации. Абберацию объяснили на основе простой классической модели: направление луча света в движущейся системе отсчета отличается от направления луча в неподвижной системе вследствие сложения скорости света со скоростью наблюдателя (рис. 9.1, а).

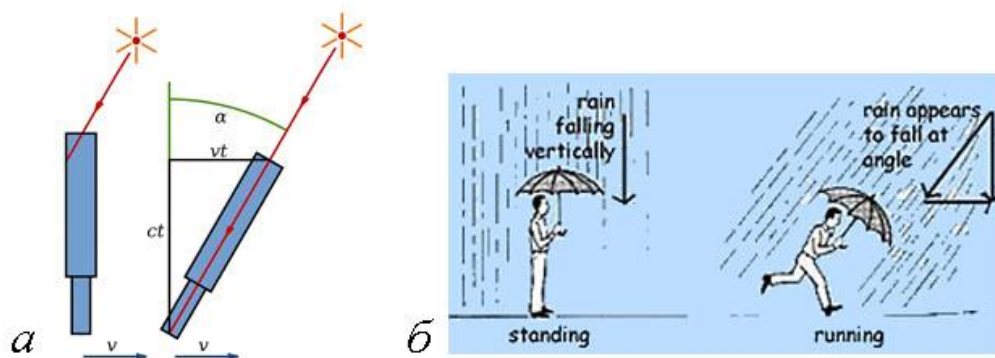


Рис. 9.1. Звездная абберация

Наблюдаемое положение звезды смещается относительно истинного положения на угол  $\alpha = v/c \approx 20''$ , где  $v$  — скорость движения Земли по орбите. Этот эффект вполне аналогичен ситуации, когда бегущему человеку кажется, что дождь идет наклонно (рис. 9.1, б), поэтому в теории эфира он получил название «эфирного ветра». Из этих опытов следовало, что эфир не увлекается движущимися телами, а остается неподвижным.

### Опыт Физо

В 1851 г. Л. Физо поставил эксперимент по распространению света в движущейся жидкости (рис. 9.2). Луч света от лампы L разделялся полупрозрачной пластинкой на два луча, один из которых проходил через текущую воду по направлению потока, а другой — против потока. Затем оба луча направлялись в интерферометр I. Было обнаружено, что интерференционные полосы смещались по сравнению со случаем неподвижной воды. По величине смещения было рассчитано,

что эфир частично увлекается движущейся средой с коэффициентом увлечения, зависящим от показателя преломления как  $k = 1 - 1/n^2$ .

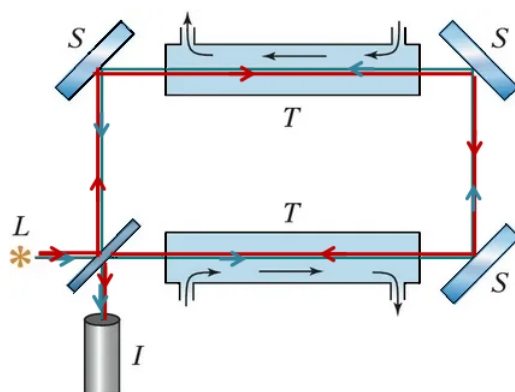


Рис. 9.2. Опыт Физо

### Опыт Майкельсона

В конце XIX в. один из лучших экспериментаторов-оптиков А. Майкельсон поставил прямой опыт по обнаружению «эфирного ветра» с помощью построенного им интерферометра (рис. 9.3).

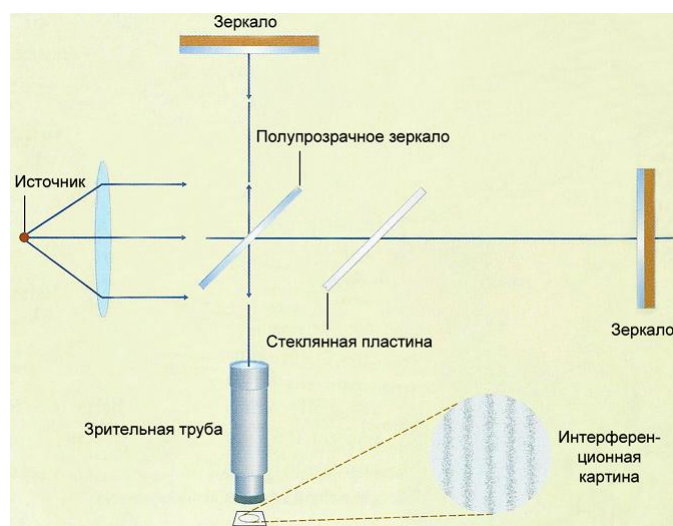


Рис. 9.3. Интерферометр Майкельсона

В интерферометре Майкельсона два световых луча распространяются во взаимно перпендикулярных направлениях. Если одно из этих направлений совпадает с направлением движения Земли, то должна возникнуть дополнительная разность фаз, связанная с тем, что луч, движущийся «по ходу», имеет **большую** скорость относительно эфира, а «против хода» — меньшую. Это вызовет смещение интерференционных полос. При повороте интерферометра на  $90^\circ$  смещение произойдет уже в другую сторону.

Уже в первом опыте в 1881 г. было показано, что если смещение и существует, то оно меньше теоретического. В 1887 г. более точный

эксперимент, проведенный Майкельсоном совместно с Морли, показал, что смещение полос меньше  $1/20$  теоретического. Такой результат был бы возможен, если бы эфир полностью увлекался движущимся телом, но это предположение противоречит как опытам Физо, так и явлению звездной aberrации.

## 9.2 Основы специальной теории относительности

### 9.2.1 Постулаты Эйнштейна

Многие физики-теоретики конца XIX — начала XX веков пытались объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона. Так, Х. Лоренц предположил, что движущиеся тела сокращаются в направлении движения, а ход «местного времени» в движущейся системе отличается от хода времени в неподвижной системе. Дж. Лармор и А. Пуанкаре развили идеи Лоренца и доказали, что уравнения Максвелла остаются при преобразованиях Лоренца инвариантными, т. е. все электромагнитные явления должны протекать одинаково в неподвижной и движущейся системах. Однако эти идеи по-прежнему базировались на представлении о существовании абсолютной системы отсчета, связанной с эфиром.

В 1905 г. А. Эйнштейн опубликовал свою знаменитую работу «К электродинамике движущихся тел». В ней он предложил теорию, получившую позже название специальной теории относительности (СТО), базирующуюся на двух постулатах.

- **Все** физические явления протекают одинаковым образом во всех **инерциальных** системах отсчёта; все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т.е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.
- Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта, **не зависит** от направления и от движения источника и приемника света.

Фактически первый постулат означает, что все инерциальные системы отсчёта (ИСО) эквивалентны (неразличимы) по своим физическим свойствам и никакими опытами нельзя выделить одну из них как предпочтительную. Напомним, что принцип относительности Галилея устанавливал эквивалентность инерциальных систем только по отношению к механическим явлениям.

Из второго постулата следует, что скорость света занимает особое положение, так как все остальные скорости меняются при переходе от

одной системы отсчета к другой.

Проанализируем некоторые следствия, вытекающие из постулатов Эйнштейна. Будем рассматривать ситуацию, когда две ИСО  $K$  и  $K'$ , движутся друг относительно друга со скоростью  $V$ , направленной вдоль оси  $X$ , общей для обеих систем. Для удобства введем безразмерную скорость, представляющую собой отношение истинной скорости к скорости света

$$\beta = \frac{V}{c}. \quad (9.1)$$

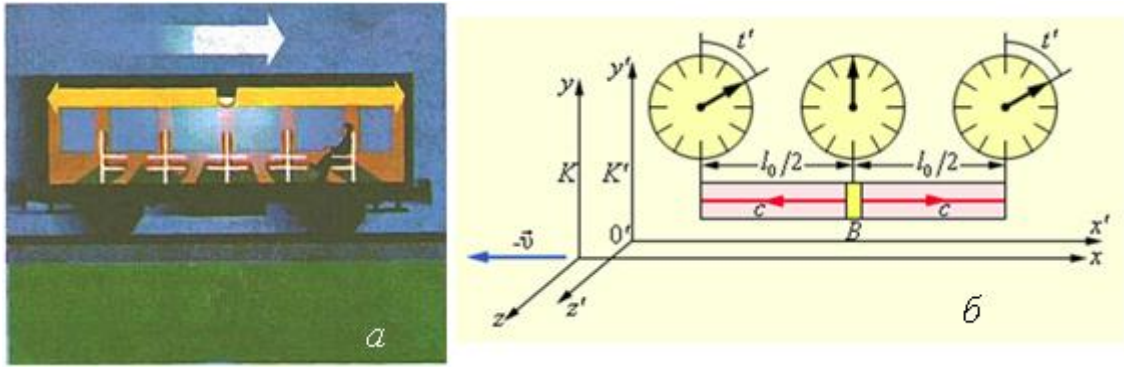
### 9.2.2 Относительность одновременности событий

Для описания любого физического события нужно указать его место и время. Положение точки можно задать, определив систему координат и масштаб (эталон) длины, с помощью которого измеряется расстояние между точками, в которых произошли два события. Аналогично следует поступить и с определением времени. Однако чтобы сравнить моменты времени, в которые произошли два события в различных точках пространства, нужно в этих точках иметь синхронизированные друг с другом часы.

Синхронизацию часов в точках  $A$  и  $B$  можно выполнить, послав в момент  $t_0$  из  $A$  в  $B$  синхронизирующий сигнал, например, световую вспышку. Из-за конечной скорости распространения света в точке  $B$  вспышку увидят с задержкой в момент  $t_1 = t_0 + l/c$ , где  $l$  — известное расстояние между точками. Соответствующую поправку нужно будет внести при установке часов.

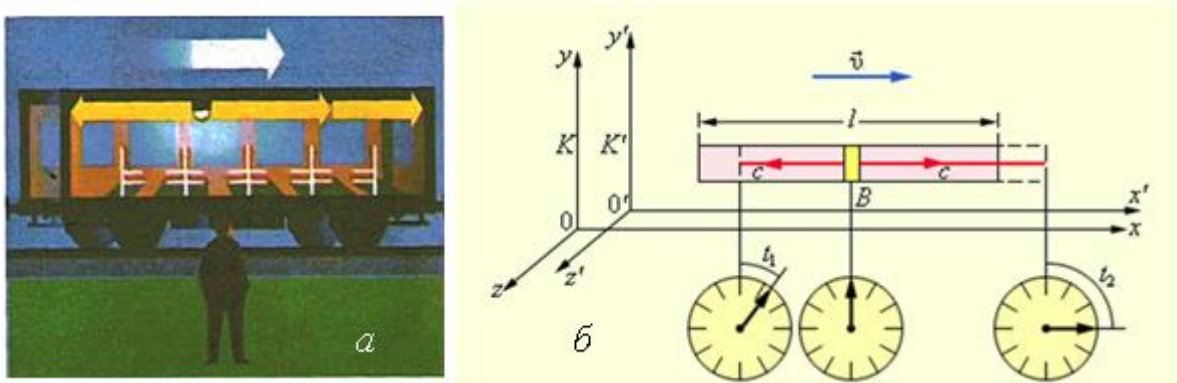
Однако этот способ хорош только если часы неподвижны друг относительно друга. Рассмотрим ситуацию, когда в середине движущегося вагона лампочка дает вспышку (рис. 9.4, *a*). Пусть в концах вагона установлены фотоэлементы, проверим, что покажут часы, установленные в концах вагона, в момент срабатывания фотоэлементов. Введем две ИСО: систему  $K$ , связанную с землей, и систему  $K'$ , связанную с вагоном.

Для наблюдателя в системе  $K'$  лампочка и часы неподвижны, поэтому одни и другие часы покажут одинаковое время  $t' = l_0/2c$  (рис. 9.4, *б*). Для этого наблюдателя фотоэлементы сработали одновременно.



**Рис. 9.4.** Синхронизация часов в системе вагона

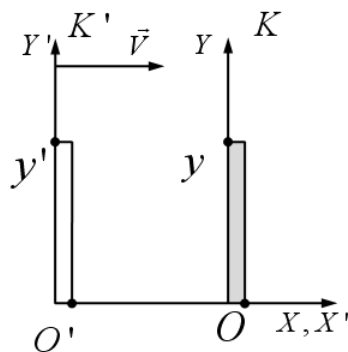
Иначе обстоит дело в системе К (рис. 9.5, а). Из-за движения вагона свет до переднего фотоэлемента пройдет большее расстояние, следовательно, показания передних и задних часов будут отличаться (рис. 9.5, б). Для этого наблюдателя фотоэлементы сработали неодновременно.



**Рис. 9.5.** Синхронизация часов в системе земли

### 9.2.3 Равенство поперечных размеров

Пусть в рассматриваемых ИСО установлены вдоль осей  $Y$  и  $Y'$  эталоны длины (рис. 9.6).



**Рис. 9.6.** Равенство поперечных размеров.

Поскольку в момент совпадения начала координат оба эталона в один и тот же момент находятся в одном и том же месте, из принципа равноправия систем следует, что размеры эталонов одинаковы. Таким



образом, поперечные размеры одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т. е.

$$y' = y. \quad (9.2)$$

### 9.2.4 Замедление времени

Пусть в системе  $K'$  на расстоянии  $l$  установлены два параллельных зеркала (рис. 9.7, а). Источник света на нижнем зеркале дает короткую вспышку, после чего световой импульс многократно отражается от зеркал. Так как все устройство в системе  $K'$  неподвижно, период таких «световых часов» равен

$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}. \quad (9.3)$$

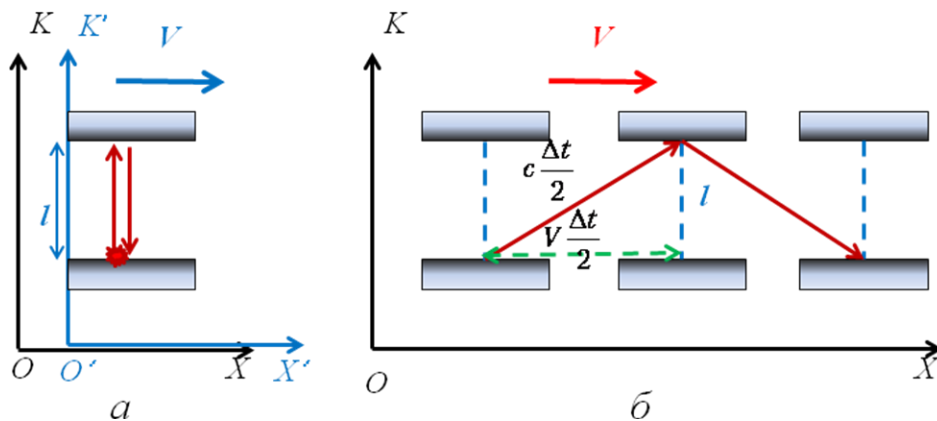


Рис. 9.7. Распространение светового импульса

Иначе обстоит дело в системе  $K$  (рис. 9.7, б). Расстояние между зеркалами не изменится, но свету придется пройти больший путь, затратив на него большее время, определяемое из соотношения

$$\left(c \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(v \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + l^2. \quad (9.4)$$

Отсюда находим, что период «световых часов» в системе  $K$  увеличится и станет равным

$$\Delta t = \frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.5)$$

Таким образом, часы в системе, относительно которой они движутся, идут медленнее, чем в системе, относительно которой они покоятся. Промежуток времени между двумя событиями зависит от того, в какой системе отсчета он измеряется, а абсолютное время ньютоновской механики — приближение, справедливое при скоростях,

малых по сравнению со скоростью света ( $\beta \ll 1$ ).

### 9.2.5 Сокращение длины

Поместим теперь в систему  $K'$  эталон длины, ориентированный параллельно движению (рис. 9.8).

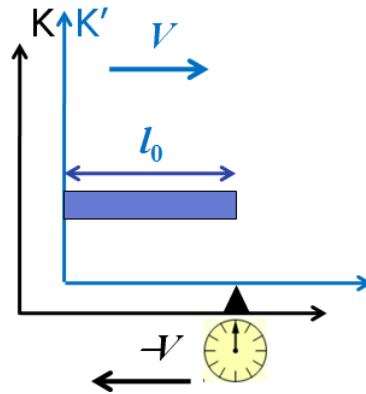


Рис. 9.8. Измерение длины

Установим в системе  $K$  часы, по которым будем засекают время прохождения эталона мимо часов. Тогда длина эталона в системе  $K$  равна  $l = V\Delta t_0$  (стержень движется, часы покоятся). Та же процедура, проведенная в системе  $K'$ , приведет к результату  $l_0 = V\Delta t$  (стержень покоится, часы движутся). Отсюда с учетом (9.5) получаем:

$$l = l_0 \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (9.6)$$

Таким образом, длина движущегося эталона  $l$  меньше его собственной длины  $l_0$ , измеренной в системе отсчета, где эталон неподвижен.

### 9.2.6 Форма движущихся объектов

Представим себе кубик с ребром  $L$  (система  $K'$ ), который движется со скоростью  $V$  мимо фотоаппарата (система  $K$ ). В момент, когда кубик пролетает мимо фотоаппарата, производится мгновенная съемка (рис. 9.9, а). Из-за конечности скорости света на фотографии будет видна не только грань  $ABCD$ , но и грань  $ABEF$ , так как за время распространения луча от  $E$  до  $B$  сама вершина  $B$  сместится на расстояние, равное  $L\frac{V}{c}$ . Из-за лоренцева сокращения продольное ребро будет иметь длину  $L\sqrt{1 - \beta^2}$ . Таким образом, изображение на фотографии получится как на рис. 9.9, б.

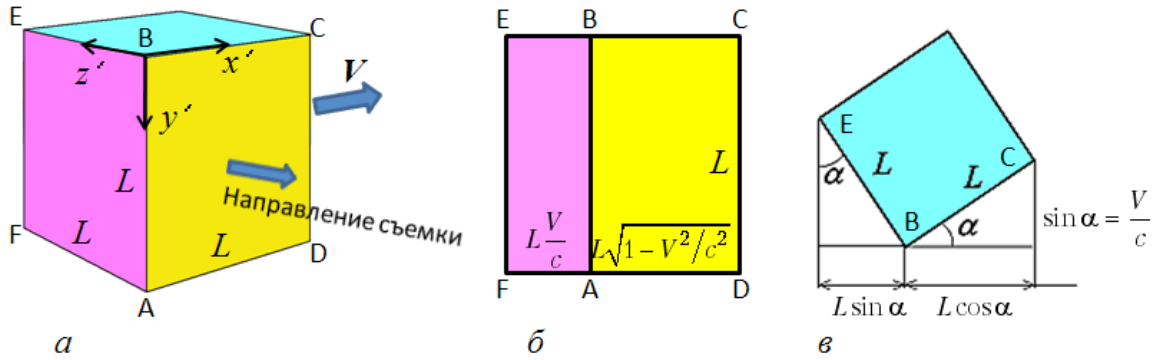


Рис. 9.9. Фотографирование движущегося куба

Отметим, что результат получается таким же, как при фотографировании неподвижного повернутого кубика (рис. 9.9, в). Этот эффект «поворачивания» справедлив и для быстро движущихся объектов другой формы.

Интересно, что преобразования Галилея дают такое же изображение грани АВЕF, но несокращенное изображение грани ABCD, т. е. сам кубик оказывается искаженным.

## 9.3 Преобразования Лоренца

### 9.3.1 Преобразование координат и времени

Пусть опять имеются две ИСО, часы в которых были синхронизированы в момент совпадения начала координат (рис. 9.9.).

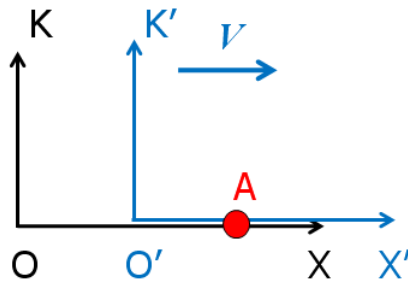


Рис. 9.9. К выводу преобразований Лоренца

Происходит некое событие А, например, вспышка света, координаты и время этого события в системе К —  $x$  и  $t$ . Координата начала отсчета системы  $K'$  в этот момент равна  $x_{O'} = Vt$ . В соответствии с (9.6) координата события в  $K'$  будет

$$O'A = x - Vt = x' \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (9.7)$$

Следовательно,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.8)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для системы  $K'$ . Результат будет, естественно, совпадать с (9.8) с точностью до изменения знака скорости  $V$ :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.9)$$

Исключая  $x$  из (9.8) и (9.9), получим преобразование времени:

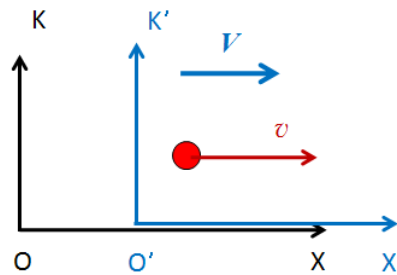
$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.10)$$

$$t = \frac{t' + \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.11)$$

Формулы (9.8) – (9.11) совместно с утверждением о неизменности поперечной координаты  $y = y'$  называются преобразованиями Лоренца. Легко видеть, что при малых скоростях, т. е. при  $\beta \ll 1$ , преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея  $x' = x - Vt$ ,  $t' = t$ .

### 9.3.2 Преобразование скорости

Пусть в системе  $K$  вдоль оси  $X$  движется частица со скоростью  $v$  (рис. 9.10).



**Рис. 9.10.** Сложение скоростей

Скорость в системе  $K'$  можно найти как

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}. \quad (9.12)$$

Используя преобразования Лоренца (9.8), (9.10) получим, что

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}. \quad (9.13)$$

При малых скоростях ( $v \ll c$ ,  $V \ll c$ ) формула (9.13) переходит в классическую ньютоновскую формулу  $v' = v - V$ . Если же скорость  $v = c$ , то и  $v' = c$ , т. е. скорость света не меняется при переходе к движущейся системе отсчета.

Рассмотрим теперь две частицы, которые в К-системе движутся со скоростью  $v$  каждая навстречу друг другу ( $v_1 = v$ ,  $v_2 = -v$ ). В К'-системе, связанной с первой частицей, скорость приближения второй частицы будет равна ( $V = v_1$ ):

$$v' = -\frac{2v}{1 + \beta^2}. \quad (9.14)$$

Очевидно, что при любых скоростях эта величина меньше  $c$ . В то же время скорость сближения частиц в К-системе равна  $2v$ , причем она может быть и больше скорости света. Это не противоречит постулатам Эйнштейна, поскольку скорость сближения не есть скорость материального объекта и не может быть использована, например, для синхронизации часов.

### 9.3.3 Пространство–время. Диаграммы Минковского

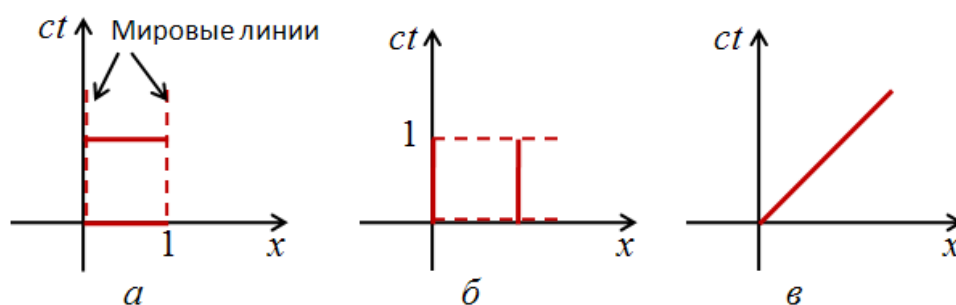
Пространство само по себе и время само по себе превращаются в тени, и лишь своего рода их союз сохраняет самостоятельность.

*Г. Минковский*

В классической ньютоновской механике трехмерное пространство и время рассматриваются независимо друг от друга. Это оправдано тем, что течение времени предполагается независимым от движения наблюдателя. В релятивистском случае время оказывается связанным с пространством. Его течение зависит как от скорости наблюдаемого объекта, так и от наличия гравитационных полей (в общей теории относительности).

В 1904–1908 гг. А. Пуанкаре и Г. Минковский ввели понятие о четырехмерном пространстве–времени, в котором пространственные и временная координаты имеют «равные права». Три координаты этого пространства представляют собой декартовы координаты точки, а четвертая — временную координату  $ct$ . Множитель  $c$  вводится для

того, чтобы по всем осям можно было ввести единый масштаб. Каждому событию, произошедшему в данный момент времени в данной точке, на диаграмме Минковского соответствует **мировая точка**, а каждому телу — **мировая линия**. На рис. 9.11, *а* показаны мировые линии для неподвижного эталона длины. Координаты концов эталона не меняются, поэтому мировые линии концов параллельны оси времени. Рис. 9.11, *б* иллюстрирует тот факт, что показания неподвижных часов одинаковы во всех точках пространства. На рис. 9.11, *в* показана мировая линия светового импульса, испущенного из начала координат в направлении оси  $X$ .



**Рис. 9.11.** Пространство Минковского

Пространство Минковского псевдоэвклидово. «Расстояние» между двумя пространственно-временными мировыми точками называется **интервалом**, квадрат интервала равен

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (9.15)$$

т. е. представляет собой разность квадратов временного и пространственного «расстояний»<sup>1</sup>.

При переходе от системы  $K$  к движущейся системе  $K'$  координаты и время преобразуются в соответствии с (9.8), (9.10). Нетрудно показать, что  $s^2 = s'^2$ , т. е. интервал инвариантен относительно преобразований Лоренца. Таким образом, если два события разделены каким-то интервалом  $s$ , то это утверждение абсолютно и справедливо во всех ИСО.

Рассмотрим, как на диаграмме Минковского отображается переход к движущейся системе отсчета. Пусть в момент  $t = 0$  начала координат систем  $K$  и  $K'$  совпадали (рис. 9.12).

<sup>1</sup> Выбор знаков в определении интервала является результатом договоренности, иногда пространственную часть берут с плюсом, а временную — с минусом.

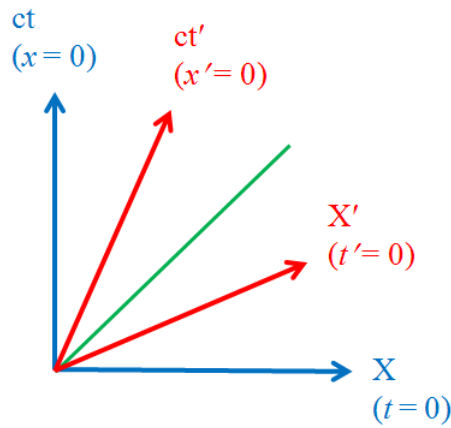


Рис. 9.12. Оси координат неподвижной и движущейся систем.

Для начала координат системы  $K'x' = 0$ , из (9.8) получаем  $x = Vt = \beta ct$ . Эта мировая линия представляет собой ось  $ct'$ , т. е. на ней лежат все точки, соответствующие событиям, происходящим в одном и том же месте — начале координат системы  $K'$ .

Все события, произошедшие в системе  $K'$  в момент  $t' = 0$ , по (9.10) удовлетворяют уравнению  $ct = \beta x$  или  $x = ct/\beta$ .

Таким образом, оси координат системы  $K'$  в  $K$ -системе оказываются неортогональны. С увеличением скорости движения системы  $K'$  угол наклона осей возрастает, и при приближении к скорости света ( $\beta \rightarrow 1$ ) оси приближаются к мировой линии света, т. е. к биссектрисе угла между осями  $x$  и  $ct$ .

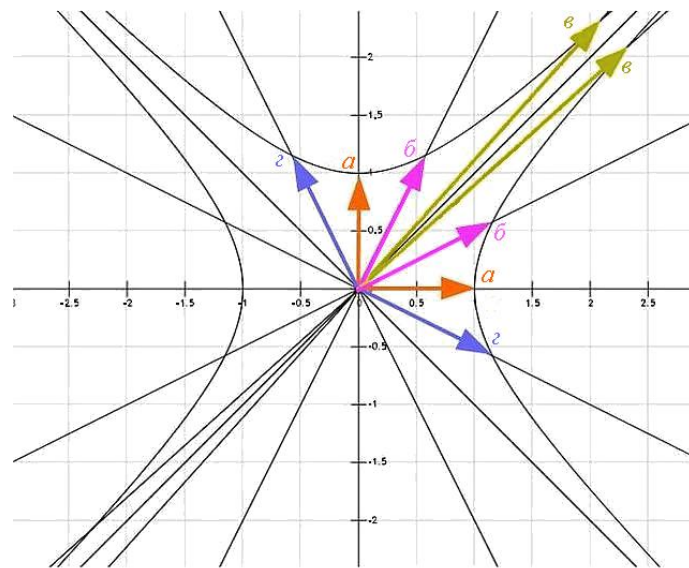


Рис. 9.13. Единичные векторы  $x$  и  $tv$  разных ИСО.  $a - \beta=0$ ;  $b - \beta=0,5$ ;  $c - \beta=0,9$ ;  $z - \beta=-0,5$

С помощью диаграммы Минковского легко проиллюстрировать, например, относительность понятия одновременности (рис. 9.14).

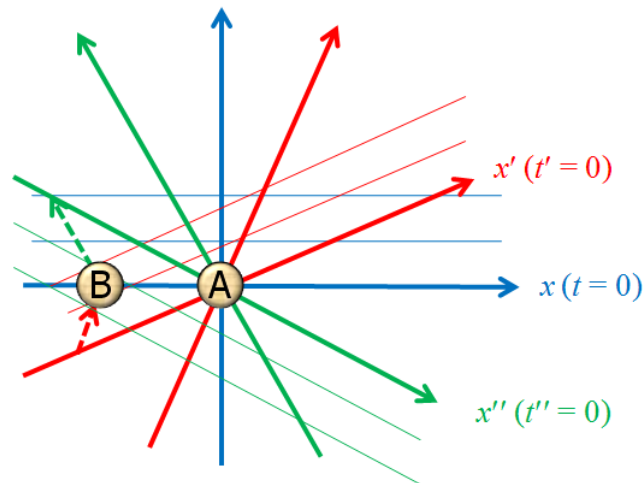


Рис. 9.14. Относительность одновременности

Пусть в системе  $K$  в момент времени  $t = 0$  произошли два события  $A$  и  $B$ . В системе  $K'$  событие  $A$  происходит в момент  $t' = 0$ , а событие  $B$  — в более поздний момент. Напротив, в системе  $K''$  событие  $B$  происходит раньше события  $A$ .

Рассматривая единичные вектора координаты и времени в разных системах отсчета на рис. 9.13, можно наглядно увидеть эффекты замедления времени и сокращения длины.

Построим для некоторой мировой точки множество всех исходящих и входящих мировых линий света. Получится двухполостная коническая гиперповерхность, которая называется **световым конусом** (рис. 9.15).

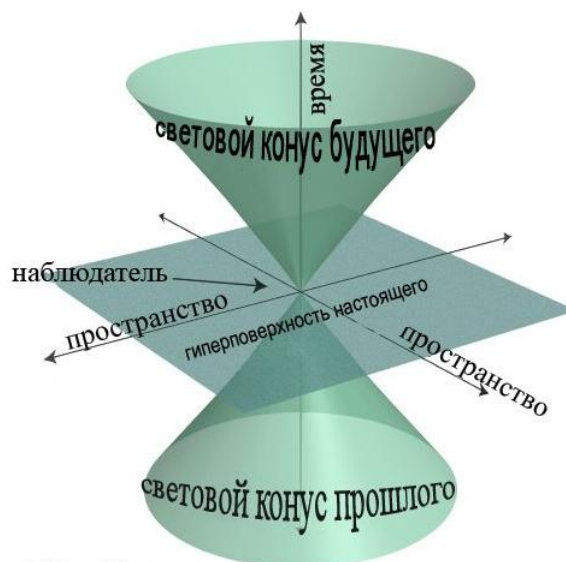


Рис. 9.15. Световой конус



Допустим, что в мировой точке, находящейся в начале координат, произошло некое событие. Если точка, соответствующая другому событию, находится внутри светового конуса, то интервал между ними  $s^2 > 0$ . В силу инвариантности интервала это неравенство будет справедливо в любой ИСО. Такой интервал называется **временноподобным**. Можно найти такую систему отсчета, в которой оба события произойдут в одной точке:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = (c\Delta t')^2.$$

Такие события могут быть связаны причинно-следственной связью.

Если же вторая точка находится вне светового конуса, то интервал  $s^2 < 0$ . Такой интервал называется **пространственноподобным**. Можно найти такую систему отсчета, в которой оба события произойдут одновременно:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = -(c\Delta l')^2.$$

Такие события не могут быть причинно связаны друг с другом.

Если  $s^2 = 0$ , то интервал называется **светоподобным**.

Особенности метрики пространства Минковского позволяют объяснить так называемый «парадокс близнецов». Если один из двух близнецов отправится в космос на ракете с околосветовой скоростью, то для него время будет идти медленнее, близнец, оставшийся на Земле, окажется старше космонавта (рис. 9.16, а).



Рис. 9.16. Парадокс близнецов

Парадокс заключается в том, что с точки зрения космонавта он неподвижен, а движется Земля, поэтому земной близнец должен составить меньше.

Объяснение этого парадокса на основе диаграммы Минковского показано на рис. 9.16, б). Если в обычной эвклидовой геометрии имеет место неравенство треугольника, и длина прямой, соединяющей

две точки, всегда меньше длины любой другой линии между теми же точками, то в геометрии Минковского из-за знака «-» в определении интервала (9.15) дело обстоит наоборот, и прямая между двумя мировыми точками имеет наибольшую длину. Поэтому с любой точки зрения состарится земной близнец, а космонавт, находившийся в неинерциальной системе отсчета, останется молодым.

## 9.4 Релятивистская динамика

### 9.4.1 Релятивистский импульс

Из преобразований Лоренца следует, что продольные (параллельные направлению скорости) и поперечные компоненты координат и скоростей преобразуются по-разному. Можно показать, что для выполнения закона сохранения импульса при столкновении двух частиц импульс следует переопределить как

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (9.16)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.17)$$

Таким образом, релятивистская масса  $m$  зависит от скорости, а масса покоя  $m_0$  — величина постоянная, одинаковая во всех системах отсчета.

Второй закон Ньютона в релятивистской динамике формально имеет такой же вид, как и в классической:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (9.18)$$

однако существует важное отличие. Действительно, если выполнить дифференцирование в (9.18), получим:

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m\vec{a}. \quad (9.19)$$

Следовательно, второй закон Ньютона в форме  $\vec{F} = m\vec{a}$  в релятивистской динамике не справедлив, а сила и ускорение в общем случае неколлинеарны.

### 9.4.2 Релятивистская энергия

Приращение кинетической энергии  $dT$  равно работе действующей на частицу силы. С учетом (9.19) получаем:

$$dT = \vec{F}\vec{v}dt = \vec{v}(dm\vec{v} + m d\vec{v}) = v^2 dm + mvdv. \quad (9.20)$$

Приращение массы найдем, возведя в квадрат и продифференцировав формулу (9.17):

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv.$$

Подставив  $dm$  в (9.20), находим, что

$$dT = c^2 dm, \quad (9.21)$$

т. е. приращение кинетической энергии пропорционально приращению релятивистской массы. Интегрируя (9.21) и учитывая, что у покоящейся частицы масса равна  $m_0$ , а кинетическая энергия нулю, окончательно получаем:

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (9.22)$$

Обобщая выражение (9.21), можно прийти к выводу, что любое приращение энергии сопровождается пропорциональным приращением массы. Установленный Эйнштейном закон взаимосвязи массы и полной энергии может быть записан в виде

$$E = mc^2. \quad (9.23)$$

В энергию  $E$  включается энергия покоя  $E_0 = m_0 c^2$ , кинетическая энергия, а также энергия взаимодействия между собой частей единой системы, например, нуклонов в атомном ядре. Отсюда ясно, что в релятивистской физике масса — величина неаддитивная: масса составной системы не равна сумме масс отдельных частей из-за энергии взаимодействия этих частей.

Из уравнений (9.16), (9.17) и (9.23) легко получить, что

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (9.24)$$

Таким образом, величина  $E^2 - p^2 c^2$  является инвариантом и одинакова во всех системах отсчета, а связь энергии частицы и ее импульса вместо классической формулы  $E = \frac{p^2}{2m}$  приобретает вид

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0c^2}. \quad (9.25)$$

Рассмотрим частицу с нулевой массой покоя  $m_0 = 0$ . Такая частица может иметь конечные импульс и энергию, только если ее скорость равна  $c$ , и наоборот, если частица движется со скоростью света, ее масса покоя равна нулю. Такой частицей является фотон. При этом из (9.25) следует, что импульс фотона связан с его энергией соотношением

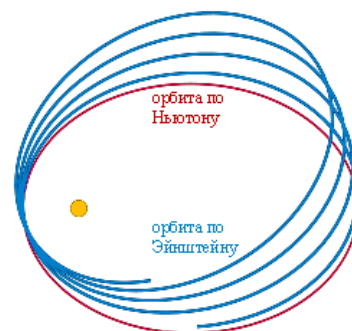
$$p = \frac{E}{c}. \quad (9.26)$$

## 9.5 Экспериментальные подтверждения теории относительности

Через 11 лет после появления специальной теории относительности Эйнштейн разработал ее обобщение — общую теорию относительности (ОТО), в которой утверждалась эквивалентность сил тяготения и инерции. Принцип эквивалентности систем отсчета был распространен также на неинерциальные системы, а гравитационная и инертная массы оказались тождественными друг другу. Рассмотрим некоторые примеры физических явлений, подтверждающих выводы СТО и ОТО.

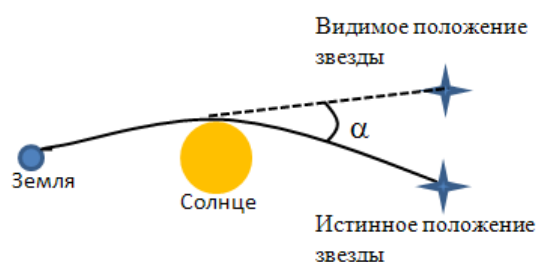
- Прецессия перигелия Меркурия

Еще в 1859 г. астрономы обнаружили, что перигелий орбиты Меркурия смещается на малую величину, 43 угловые секунды за столетие. Это был первый случай движения небесного тела, не подчиняющийся законам Ньютона. Расчеты, выполненные Эйнштейном по ОТО, дали прекрасное согласие с экспериментальными данными.



- Гравитационное отклонение света

Искривление пути света вблизи больших тяготеющих объектов предсказывается как теорией Ньютона, так и ОТО, однако в последнем случае угол отклонения вдвое больше. В 1919 г. А. Эддингтон во время полного солнечного затмения обнаружил смещение видимого положения звезд на угол  $\alpha = 1,75''$ ,



что совпало с предсказаниями ОТО.

- Мюоны

В 1936 г. были обнаружены нестабильные элементарные частицы — мюоны, время жизни которых составляло 2 мкс. Эти частицы образовывались в верхних слоях атмосферы при столкновениях высокоэнергетичных космических лучей с атомами атмосферных газов. Очевидно, что долететь до поверхности Земли мюоны могут только вследствие релятивистского замедления времени.

- Гравитационное замедление времени и красное смещение

В поле тяготения происходит замедление времени. Следовательно, увеличивается период световых колебаний и длина волны излучения, т. е. спектральные линии смещаются в красную сторону спектра. Это явление в 1928 г. наблюдалось В. Адамсом в спектре спутника Сириуса — белого карлика, плотность которого в 50 тыс. раз больше плотности воды. В 1960 г. Паунд и Ребка в Гарвардском университете измерили гравитационное смещение частоты, возникающее при распространении электромагнитного излучения на расстояние 22,5 м по вертикали между первым и пятым этажами здания университета. Относительное изменение частоты оказалось около  $2 \cdot 10^{-15}$ .

В 1971 г. Дж. Хафеле и Р. Китинг с цезиевыми атомными часами дважды облетели на самолете вокруг света (на восток и на запад). Затем показания «путешествовавших» часов сравнили с такими же часами, остававшимися на месте.

Разность показаний путешествовавших и остававшихся на месте часов, наносекунды				
При движении	Вычисленная (предсказанная)			Измеренная фактически
	Гравитационный вклад (ОТО)	Кинематический вклад (СТО)	Общий вклад (ОТО + СТО)	
На восток	+ 144 ± 14	- 184 ± 18	- 40 ± 23	- 59 ± 10
На запад	+ 179 ± 18	+ 96 ± 10	+ 275 ± 21	+ 273 ± 7

В настоящее время поправка на замедление времени обязательно учитывается в часах навигационных спутников, при высоте орбиты спутника 20 тыс. км поправка составляет –45 мкс в сутки.

- Связь массы и энергии

При ядерных реакциях изменение массы, связанное с выделением энергии, может составлять десятые доли процента. Полное превращение в энергию 1 кг вещества эквивалентно взрыву 20 мегатонн тротила. Солнце за одну секунду теряет массу  $4 \cdot 10^9$  кг (что, впрочем, составляет всего  $10^{-21}$  общей массы Солнца).

## Литература

1. Иродов И. Е. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Основные законы.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика, т. 3. Оптика.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика, т. 4. Оптика.
4. Берклеевский курс физики. Том 1. Механика. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.
5. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 1. Современная наука о природе, законы механики.
6. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 2. Пространство, время, движение.
7. Спасский Б. И. История физики ч. II. М., Высшая школа. 1977.

Боярский Кирилл Кириллович  
Смирнов Александр Витальевич

**МЕХАНИКА Часть 2. ЭНЕРГИЯ, ДИНАМИКА  
ВРАЩЕНИЯ, ОСНОВЫ ТЕОРИИ  
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А