МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО"

Университет ИТМО

Физико-технический факультет

ОБЩАЯ ФИЗИКА
ЛЕКЦИОННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Методические рекомендации
к проведению лекционных демонстраций по разделам:
механика, термодинамика, электромагнетизм, оптика, атомная физика

Санкт-Петербург, 2020

1 Колебания

1.1 Связанные маятники. Биение

1.1.1 Теория

Связанная система – система со многими степенями свободы, между которыми имеются связи, обеспечивающие возможность обмена энергией, например, два маятника, соединенных между собой пружиной (рис. 1). Эта система имеет две степени свободы. Если один из маятников вывести из положения равновесия, отклонив его, то после начала колебания начнет раскачиваться второй маятник.

Рис. 1: Связанный маятник

Движение связанных маятников всегда может быть представлено как суперпозиция двух гармонических колебаний, частоты которых называются *нормальными частотами связанной системы*: синфазное колебание с частотой ω_1 (в начальный момент времени оба маятника отклонены на один и тот же угол и имеют одинаковые скорости) и противофазное колебаний с частото ω_2 (в начальный момент времени маятники отклоняются на противоположный угол и имеют противоположные угловые скорости). В общем случае при любых начальных условиях совершаются оба нормальных колебания, при этом наблюдаются *биения* – периодическое возрастание и убывание амплитуды колебаний каждого из маятников, ввиду обмена энергиями между маятниками.
Задача исследования биения сводится к нахождению нормальных колебаний и нормальных частот.

Математическое описание

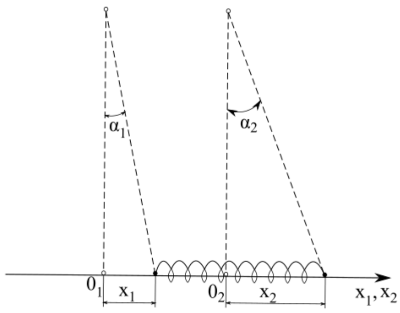

Рис. 2: Схематичное изображение связанного маятника

Положение колеблющихся точек связанного маятника характеризуется их смещениями x_1 и x_2 от своих положений равновесия O_1 и O_2 (рис. 2). Когда точки находятся одновременно в положениях равновесия, соединяющая их пружина недеформирована.
Частота нормального колебания маятников, когда они колеблются синхронно (в одной и той же фазе), – ω_1, а в противофазе – ω_2. Ясно, $\omega_2 > \omega_1$. Общее колебание системы является суперпозицией двух нормальных колебаний:

$$\boxed{x_1 = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\sin(\omega_2 t + \phi_2)} \tag{1}$$

$$\boxed{x_2 = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) - B\sin(\omega_2 t + \phi_2)} \tag{2}$$

Четыре неизвестные постоянные A, B, ϕ_1, ϕ_2 определяются из начальных условий, выражающих значения отклонений x_{10}, x_{20} и скоростей $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$ в начальный момент времени, $t = 0$:

$$x_{10} = A\sin\phi_1 + B\sin\phi_2,\ x_{20} = A\sin\phi_1 - B\sin\phi_2 \tag{3}$$

$$\dot{x}_{10}= A\omega\cos\phi_1 + B\omega\cos\phi_2,\ \dot{x}_{20}= A\omega\cos\phi_1 - B\omega\cos\phi_2 \tag{4}$$

После нахождения из (3) и (4) величин A, B, ϕ_1, ϕ_2, можно полностью описать движение с помощью (1) и (2).

Задачу о колебании связанных маятников можно так же решить, применяя непосредственно динамические законы движения. Уравнения движения заданных математических маятников с учетом, что длина l одинакова:

$$\ddot{\alpha}_1= -(g/l)\alpha_1,\ \ddot{\alpha}_2= -(g/l)\alpha_2 \tag{5}$$

где α_1 и α_2 – углы отклонения каждого из заданных маятников от вертикалей (рис. 2). Отклонения от положения равновесия связаны с углами α_1 и α_2 соотношениями: $x_1 = \alpha_1 l$, $x_2 = \alpha_2 l$, следовательно, уравнение движения материальных точек без учета их связи пружиной имеют вид:

$$\ddot{x}_1= -(g/l)x_1,\ \ddot{x}_2= -(g/l)x_2 \tag{6}$$

При деформации пружины возникают силы, пропорциональные удлинению (закон Гука). Удлинение пружины есть $(x_2 - x_1)$, поэтому силы, действующие на материальные точки, равны

$$F_1 = -F_2 = k(x_2 - x_1) \tag{7}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Уравнения движения точек с учетом сил связи посредством пружины имеют вид:

$$\ddot{x}_1 = -(g/l)x_1 + (k/m)(x_2 - x_1),\ \ddot{x}_2 = -(g/l)x_2 - (k/m)(x_2 - x_1) \tag{8}$$

где m — одинаковая масса материальных точек. Складывая их левые и правые части, а затем вычитая:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -(g/l)(x_1 + x_2),\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -(g/l)(x_1 - x_2) - (2k/m)(x_1 - x_2) \tag{9}$$

Таким образом, уравнение для суммы и разности отклонений маятников имеет вид уравнений свободных гармонических колебаний:

$$(x_1 \ddot{+} x_2) + \omega_1^2(x_1 + x_2) = 0,\ (x_1 \ddot{-} x_2) + \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0 \tag{10}$$

$$\omega_1 = \sqrt{(g/l)},\ \omega_2 = \sqrt{(g/l) + (2k/m)} \tag{11}$$

Решение уравнений:

$$x_1 + x_2 = A_0 \sin \omega_1 t + \phi_1,\ x_1 - x_2 = B_0 \sin \omega_2 t + \phi_2 \tag{12}$$

Отклонения x_1 и x_2:

$$\boxed{x_1 = (1/2)A_0 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + (1/2)B_0 \sin(\omega_2 t + \phi_2)} \tag{13}$$

$$\boxed{x_2 = (1/2)A_0 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - (1/2)B_0 \sin(\omega_2 t + \phi_2)} \tag{14}$$

Формулы совпадают с (1) и (2), если положить $A = A_0/2$, $B = B_0/2$, поэтому величины ω_1 и ω_2, определенные формулами (11) – нормальные частоты колебаний рассматриваемой связанной системы с двумя степенями свободы. [1]

1.1.2 Ход демонстрации

В момент $t = 0$ один из маятников, отклоненнный на некоторый угол, отпускают, когда второй находится в вертикальном положении ($\alpha_1 = 0$).

Вся энергия первоначально была сосредоточена в первом маятнике, а второй покоился, но с течением времени в результате связи через пружинку энергия постепенно передается от первого ко второму до тех пор, пока вся энергия не окажется во втором, и первый остановится. Процесс повторяется от второго к первому и так далее, т.е. совершаются *биения* с обменом энергии. [2]

Список литературы

[1] А. Н. Матвеев, Механика и теория относительности, стр. 385

[2] Видеодемонстрация колебаний связанного маятника