

Материалы семинаров. Осень 2025
ФИТиП
М3202/3206/3214

9 октября 2025 г.

Для решения задач необходимо придерживаться следующей схемы.

1. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.
 - (a) Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
 - (b) Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
 - (c) Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел.
2. Записать полную систему уравнений для искомых величин.
 - (a) Записать в проекциях на оси координат: а) законы движения, б) законы изменения скорости, в) законы изменения ускорения.
 - (b) Записать начальные условия.
 - (c) Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).
3. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.
 - (a) Решить систему полученных уравнений.
 - (b) Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
 - (c) Получить численный результат.

Семинар №1

Задача 1.13

Точка A движется равномерно со скоростью v так, что вектор $\vec{v}$ все время «нацелен» на точку B , которая движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между точками равно l . Через сколько времени точки встретятся?

Задача 1.15

Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка 2,7 м, начала подниматься с ускорением $1,2 \text{ м/с}^2$. Через 2,0 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт. Найти:

- время свободного падения болта;
- перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

Задача 1.18

Точка движется вдоль оси X со скоростью, проекция которой v_x как функция времени описывается графиком на рис. 1. В момент $t = 0$ координата точки $x = 0$. Изобразить примерные графики зависимости ускорения a_x , координаты x и пройденного пути s от времени.

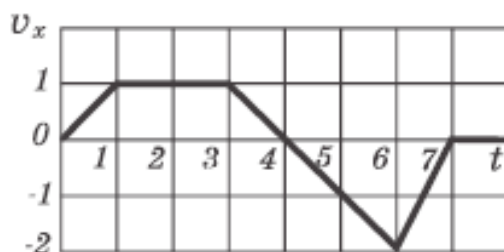


Рис. 1: Рисунок к задаче 1.18

Задача 1.21

В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси X . Ее скорость меняется со временем t как $v = v_0(1 - t/\tau)$, где v_0 — начальная скорость, ее модуль $v_0 = 10,0$ см/с, $\tau = 5,0$ с. Найти:

- а) координату x частицы, когда $t = 6,0, 10$ и 20 с;
- б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии $10,0$ см от начала координат.

Задача 1.28 (ИДЕТ В ДЗ)

Тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Найти:

- а) время движения;
- б) максимальную высоту подъёма и горизонтальную дальность полета; при каком α они равны друг другу;
- в) уравнение траектории $y(x)$, где y и x — перемещения тела по вертикали и горизонтали соответственно.

Домашнее задание №1

Задача

Начертить графики зависимости скорости (и перемещения) некоторых тел от времени, если графики ускорения этих тел имеют вид, представленный на рисунке 2 (начальная скорость V_0 во всех случаях равна нулю).

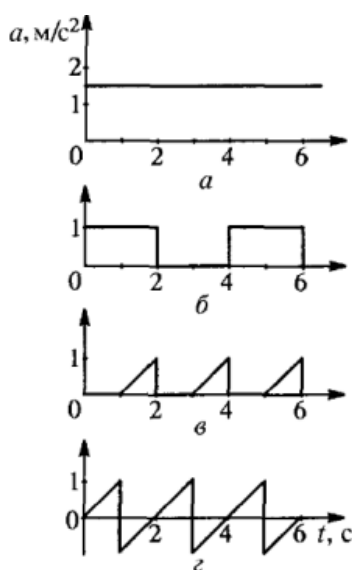


Рис. 2: Графики зависимости ускорения от времени

Задача

Радиус-вектор радиоуправляемой машины относительно оператора меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{b}t \left(1 - \frac{\alpha t}{2}\right)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, α – положительная постоянная. Найти: а) скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ машины в зависимости от времени; б) промежуток времени Δt , по истечении которого частица машина в исходную точку, а также путь S , который она при этом пройдёт.

Ответ: а) $V = a(1 - \alpha t)$, $t < \frac{1}{2\alpha}$; $V = a(\alpha t - 1)$, $t > \frac{1}{2\alpha}$, б) $S = \frac{a}{2\alpha}$

Задача

Точка движется в плоскости xOy по закону $x = A \sin(\omega t)$, $y = A(1 - \cos(\omega t))$, где A и ω положительные постоянные. Найти:

1. путь s , проходимый точкой за время τ ;
2. угол между скоростью и ускорением точки.

Ответ: $S = \tau A \omega$, $\alpha = \pi/2$

Задача (*)

Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна v_0 . Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = \alpha y$, где α - постоянная, а y - высота подъема. Найти зависимость от высоты подъема:

1. сноса шара $x(y)$
2. полного, нормального и тангенциального ускорений шара (*).

Ответ: $x = \frac{\alpha y^2}{2V_0}$, $a_\tau = \frac{\alpha^2 y V_0}{\sqrt{(\alpha^2 y^2 + V_0^2)}}$, $a_n = \frac{\alpha V_0^2}{\sqrt{(\alpha^2 y^2 + V_0^2)}}$

Задача (*)

Лодка движется относительно воды со скоростью, в $n = 2$ раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

Ответ: $\theta = 120^\circ$

Семинар №2 (Динамика. Законы Ньютона, импульс)

Задача

На верхнем краю идеально гладкой наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. На одном её конце привязан груз массой m_1 , лежащий на наклонной плоскости. На другом конце висит груз массой m_2 . С каким ускорением a движутся грузы и каково натяжение нити? Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α

Задача

Через блок, подвешенный к потолку, перекинута нить. К концам нити прикреплены два груза массами m_1 и m_2 . Определить ускорения тел. Что изменится, если система начнет двигаться с постоянным ускорением?

Задача

Рассмотрим две ситуации с санками: 1) Санки массой m за веревочку тянут с силой F по горизонтальной поверхности. Угол наклона веревки α , коэффициент трения μ и 2) санки сзади толкают (с той же силой F) по той же поверхности. Угол приложения силы такой же.

Найти отношения ускорений санок a_1/a_2 .

Задача

На столе лежит доска массой $m_1 = 1$ кг, а на доске – груз массой $m_2 = 2$ кг.

Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской равен μ_1

$= 0,25$, а между доской и столом $\mu_2 = 0,5$.

Домашнее задание №2

Задача на дом (ДОДЕЛАТЬ)

На столе лежит доска массой $m_1 = 1$ кг, а на доске – груз массой $m_2 = 2$ кг.

Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской равен $\mu_1 = 0,25$, а между доской и столом $\mu_2 = 0,5$.

Задача

Парашютист совершает затяжной прыжок. До раскрытия парашюта он падает со скоростью $v_1 = 60$ м/с, после раскрытия приземляется со скоростью $v_2 = 6$ м/с. а) Подсчитать, каково было бы максимальное натяжение строп парашюта, если бы в конце затяжного прыжка он раскрывался бы мгновенно. Масса парашютиста $m = 80$ кг, а силу сопротивления воздуху можно считать пропорциональной квадрату скорости $F_c = kv^2$. Считать массу парашюта и его строп малой по сравнению с массой парашютиста. б) Каково реальное натяжение строп, если время раскрытия парашюта $\tau = 1$ с, и в течение этого времени натяжение постоянно? (**считать, что за время раскрытия скорость постоянна**)

$$\text{Ответ: а) } T = F_c = 100mg, \text{ б) } T = mg \frac{v_3^2}{v_2^2} = 5.66mg, \quad \frac{v_3}{v_2} = 2.38$$

Задача

Вы планируете спуск со склона на сноуборде. Основание склона составляет $l = 200$ м, коэффициент трения между сноубордом и склоном - $k = 0,13$. Какова должна быть крутизна склона α чтобы вы съехали с него за наименьшее время? Каково будет это время?

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{k}, \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - k \cos \alpha)}}$$

Задача

Велосипедист едет по круглой горизонтальной площадке, радиус которой R , а коэффициент трения зависит только от расстояния r до центра O площадки по закону $k = k_0(1 - r/R)$, где k_0 – постоянная. Найти радиус окружности с центром в точке O , по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью. Какова эта скорость?

Ответ: $r = R/2$, $V_{max} = \frac{1}{2}k_0gR$

Семинар №3+4 (Законы сохранения.)

Задача 1.151

Небольшое тело массы m медленно втащили на горку, действуя силой F , которая в каждой точке направлена по касательной к траектории (рис. 1.26). Найти работу этой силы, если высота горки h , длина ее основания l и коэффициент трения k .

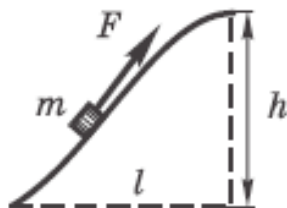


Рис. 3: Рис. 1.26 (По Иродову)

Задача 1.152

Брусек массы $m = 2,0$ кг медленно подняли по шероховатой наклонной плоскости на высоту $h = 51$ см при помощи нити, параллельной этой плоскости. При этом совершили работу $A = 16,0$ Дж. На высоте h нить отпустили. Найти скорость бруска, достигшего первоначального положения.

Задача 1.169

Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $U = a/r^2 - b/r$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние от центра поля. Найти: а) значение r_0 , соответствующее равновесному положению частицы; выяснить, устойчиво ли это положение; б) максимальное значение силы притяжения; изобразить примерные графики зависимостей $U(r)$ и $F_r(r)$.

Задача 1.173

Небольшая шайба A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H , имеющей горизонтальный трамплин (рис. 1.27). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние s ? Чему оно равно?

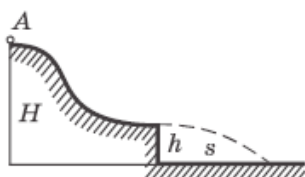


Рис. 4: Рис. 1.27(По Иродову)

Задача

Из ружья массой $m_2=5$ кг вылетает пуля массой $m_1=5$ г со скоростью $v_1=600$ м/с. Найти скорость v_2 отдачи ружья.

Задача

Ящик с песком массой M лежит на горизонтальной поверхности. Под углом α к горизонтали в ящик попадает пуля, имеющая массу m и скорость V , и застревает в песке. Определить скорость пули, если ящик остановился через время τ после попадания в него пули. Коэффициент трения между ящиком и поверхностью равен μ . Считать, что выполняется соотношение $mv \gg Mg\Delta t$, где Δt - время за которое скорость пули относительно ящика становится равной нулю.

Задача

Две одинаковые тележки массами M движутся друг за другом с постоянной скоростью v_0 в положительном направлении оси X . Человек массы m стоя неподвижно на задней тележке совершает прыжок

на переднюю тележку со скоростью u относительно задней тележки. Определить скорости тележек в результате прыжка. Считать, что скорость человека направлена параллельно оси.

Домашнее задание №3+4

Задача 1.174

Небольшое тело A начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$ (рис. 1.28). Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

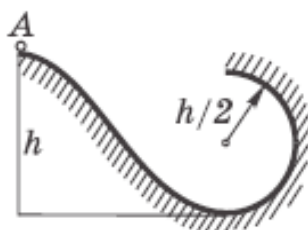


Рис. 5: Рис. 1.28 (По Иродову)

Задача 1.183

В системе (рис. 1.29) масса каждого бруска $m = 0,50\text{ кг}$, жесткость пружины $x = 40\text{ Н/м}$, коэффициент трения между бруском и плоскостью $k = 0,20$. Массы блока и пружины пренебрежимо малы. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Найти максимальную скорость брусков.

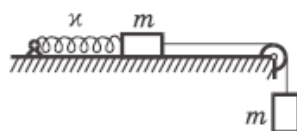


Рис. 6: Рис. 1.29(По Иродову)

Задача 1.194

Летевшая горизонтально пуля массы m попала в тело массы M , которое подвешено на двух одинаковых нитях длины l (рис. 1.36), и застряла в нем. В результате нити отклонились на угол θ . Считая $m \ll M$, найти: а) скорость пули перед попаданием в тело; б) относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию.

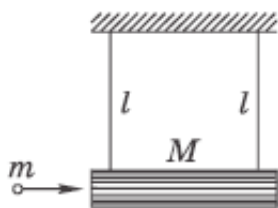


Рис. 7: Рис. 1.36(По Иродову)

Задача (СЗИ)

Два человека равной массы m стоят на неподвижной лодке в озере и совершают последовательно прыжки в воду, отталкиваясь со скоростью u относительно лодки. Какую скорость приобретет лодка после второго прыжка? Во сколько раз изменится скорость лодки, если они совершат прыжок одновременно с той же скоростью?

Задача (СЗИ)

Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, совпадающей по направлению с её вектором скорости. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью u кг/с. Найти ускорение a и скорость v тележки в момент t , если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и её скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

Приложение (теорсправка)

Работа силы и мощность. Работа - изменение кинетической энергии. Импульс тела. Осн. ур-е динамики. Закон сохранения импульса. Движение тела с переменной массой. Реактивное движение. Уравнение Мещерского

0.1 Основные понятия и формулы

Работа силы $\vec{F}$ при бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ материальной точки, на которую действует сила (точки приложения силы), равна скалярному произведению силы на это перемещение:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

Работа силы $\vec{F}$ при конечном перемещении материальной точки, на которую действует сила, равна:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Здесь r_1 и r_2 – радиус-векторы точки в начальный и конечный моменты времени. Заметим, что в общем случае работа силы зависит от выбора системы отсчета, а также от траектории движения материальной точки, на которую действует сила (не только от начального и конечного положения материальной точки).

Мощность силы – физическая величина, численно равная работе, совершаемой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha$$

Кинетическая энергия материальной точки – физическая величина, равная:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Материальная точка, находящаяся в потенциальном силовом поле, обладает потенциальной энергией, причем связь между силой, действующей на точку, и потенциальной энергией, имеет вид:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -grad E_p$$

где

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

оператор набла (Гамильтона), т.е. потенциальные силы определяются как градиент потенциальной энергии взятой со знаком «минус». Таким образом, проекции силы равны:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z},$$

Формулы для потенциальной энергии имеют разный вид в зависимости от характера действующих потенциальных сил:

потенциальная энергия квазиупругой силы:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$G = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{Hm^2}{kg^2}$ гравитационная постоянная

потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью планеты на высоту $h \ll R$ (R -радиус планеты)

$$E_p = mgh$$

Механическая энергия системы – сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы:

$$E = E_k + E_p$$

Замкнутая (изолированная) механическая система – это механическая система, для которой сумма всех внешних сил равна нулю:

$$\sum \vec{F}_i^{\text{внешн}} = \vec{F}^{\text{внешн}}$$

Закон сохранения энергии

Для замкнутой системы, в которой отсутствуют диссипативные силы (силы, рассеивающие энергию) сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная:

$$E_k + E_p = \text{const}$$

Работа, совершаемая механической системой над внешними телами численно равна убыли механической энергии системы:

$$A = -\Delta E = -(E_2 - E_1) = E_1 - E_2$$

Работа, совершаемая внешними силами над материальной точкой, идет на приращение ее кинетической энергии (теорема о кинетической энергии):

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Изменение полной механической энергии системы численно равно работе внешних сил:

$$\Delta E = A_{\text{внешн}}$$

Удар (соударение) – это кратковременное взаимодействие тел при непосредственном соприкосновении, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

Абсолютно упругий удар (соударение) – удар, в результате которого суммарная кинетическая энергия тел до соударения равна суммарной кинетической энергии тел после соударения.

Абсолютно неупругий удар (соударение) – удар, при котором соударяющиеся тела приобретают одинаковую скорость после соударения.

Неупругий удар (соударение) – удар, в результате которого часть суммарной кинетической энергии тел переходит в их внутреннюю энергию.

Центральный удар (соударение) – удар, при котором силы упругости, действующие между соударяющимися телами, направлены вдоль прямой, соединяющей центры масс тел.

Лобовой удар (соударение) – удар, при котором скорости соударяющихся тел лежат на прямой, соединяющей центры масс тел.

Импульс механической системы $\vec{p}$ – физическая величина, равная сумме импульсов материальных точек, из которых состоит система:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

Закон сохранения импульса: Полный импульс изолированной системы материальных точек остается неизменным :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = const$$

Закон изменения импульса механической системы (Второй закон Ньютона)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Движение тела с переменной массой. Реактивное движение. Уравнение Мещерского.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}.$$

Реактивная сила – сила, действующая на тело со стороны отделяющихся от него частиц:

$$F(t) = -\frac{dm}{dt} \vec{u}(t)$$

Формула Циолковского - зависимость скорости тела v , движущегося под действием постоянной реактивной силы, от его массы M :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right)$$

где u — скорость отделяющихся частиц относительно тела, M_0 и $\vec{v}_0$ — начальные (в момент времени $t = t_0$) масса и скорость тела.

Формула Циолковского определяет скорость, которую развивает летательный аппарат под воздействием тяги ракетного двигателя, неизменной по направлению, при отсутствии всех других сил. Эта скорость называется характеристической скоростью:

$$\vec{v} = I \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

где $\vec{v}$ — конечная скорость летательного аппарата, которая для случая маневра в космосе при орбитальных манёврах и межпланетных перелетах часто обозначается ΔV , также именуется характеристической скоростью;

I — удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

M_1 — начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

M_2 — конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Для многоступенчатой ракеты конечная скорость рассчитывается как сумма скоростей, полученных по формуле Циолковского отдельно для каждой ступени, причем при расчёте характеристической скорости каждой ступени к её начальной и конечной массе добавляется суммарная начальная масса всех последующих ступеней.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^N I_i \ln\left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N M_{1j}}{M_0 + M_{2i} + M_{1i} + \sum_{j=i}^N M_{1j}}\right)$$

M_{1i} — масса заправленной i -й ступени ракеты;

M_{2i} — масса i -й ступени без топлива;

I_i — удельный импульс двигателя i -й ступени;

M_0 — масса полезной нагрузки;

N — число ступеней ракеты.

Если система не замкнута и тела взаимодействуют за счёт трения, то сумма изменений кинетической и потенциальной энергий равна работе силы трения

$$\Delta E_k + E_p = A_{\text{тр}}$$

$$E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1} = F_{\text{тр}} S$$

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} S$$