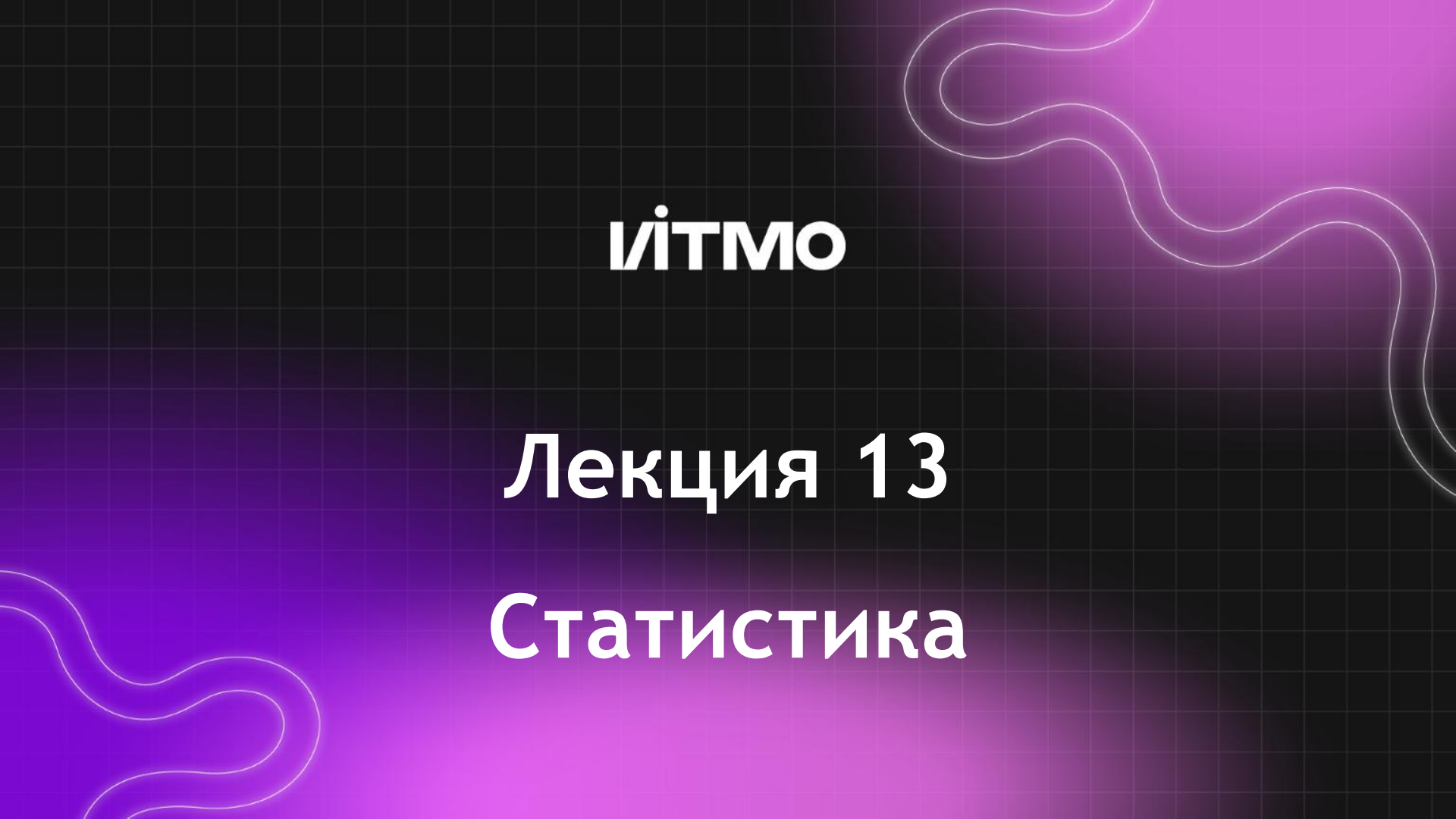
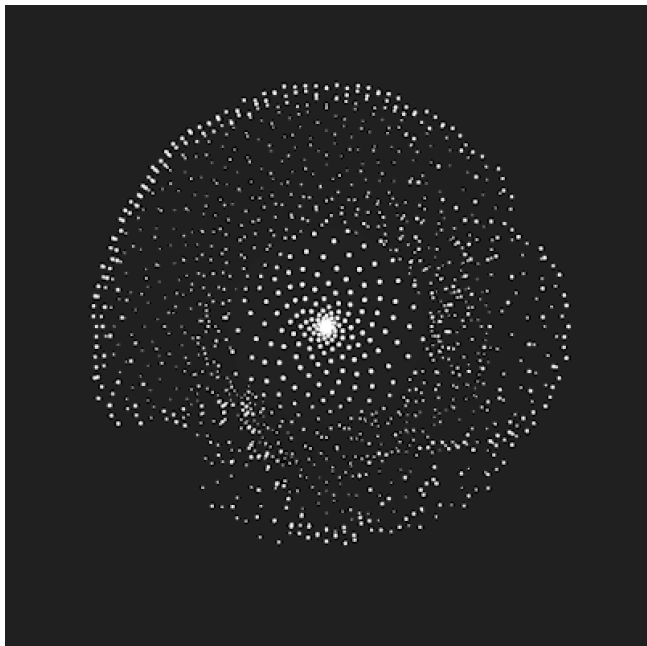




ІІТМО

Лекция 13

Статистика



термодинамическая система из N частиц;
 ξ — величина, характеризующая частицу

Вероятность того, что величина ξ будет
иметь значение ξ_i

$$P_i = \frac{N_i}{N}$$

N_i — количество частиц, для которых $\xi = \xi_i$

Функция распределения

Условие нормировки:

$$\sum P_i = 1$$

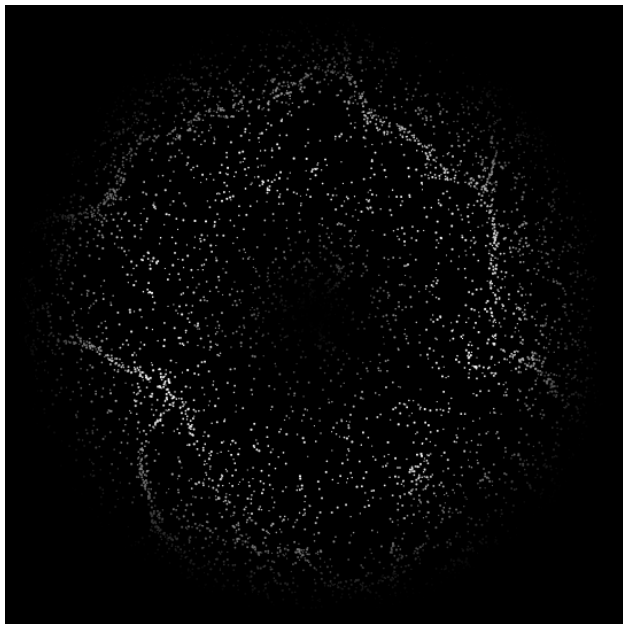
Среднее значение величины

$$\langle \xi \rangle = \frac{\sum N_i \xi_i}{N} = \sum P_i \xi_i$$

Если величина ξ изменяется непрерывно, то вероятность того, что $\xi = (\xi, \xi + d\xi)$

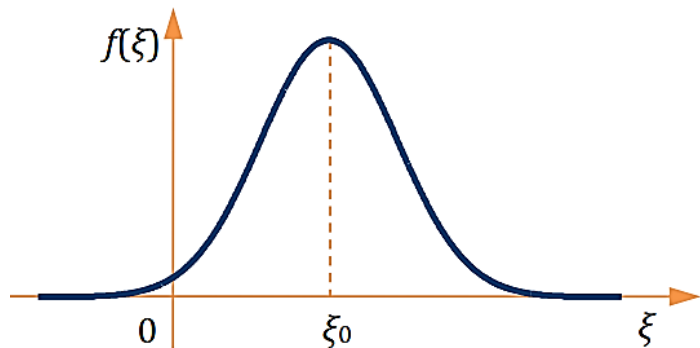
$$dP = f(\xi)d\xi$$

$f(\xi)$ — функция распределения вероятности (плотность вероятности)



Распределение Гаусса

$$f(\xi) = Ae^{-\alpha(\xi-\xi_0)^2}$$



Свойства функции распределения

1. Определённость и непрерывность во всей области определения $\xi(a, b)$
2. Дифференцируемость во всей области определения
3. Интегрируемость во всей области определения
4. Условие нормировки (нормируемость)

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = 1$$

Функция распределения

Вероятность того, что величина ξ принимает значение от ξ_1 до ξ_2 ,

$$P(\xi_1, \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi$$

Среднее значение

$$\langle \xi \rangle = \int_a^b \xi f(\xi) d\xi$$

Среднее значение квадрата

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_a^b \xi^2 f(\xi) d\xi$$

Среднее значение функции

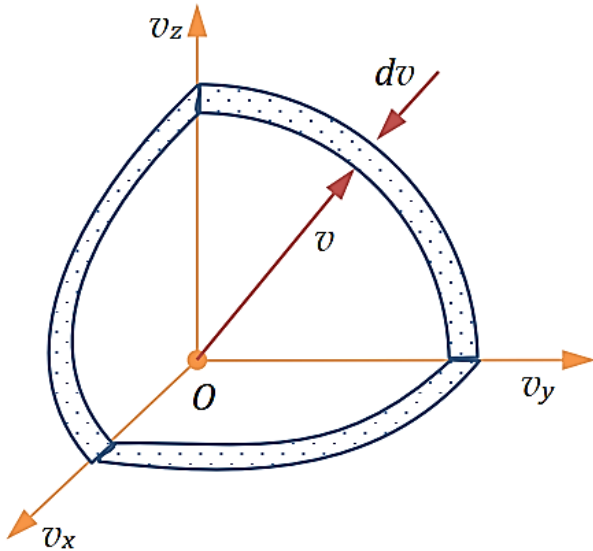
$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \int_a^b \varphi(\xi) f(\xi) d\xi$$

Наиболее вероятное значение

$$\left. \frac{df(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{\text{вер}}} = 0$$

Распределение Максвелла

идеальный газ из N частиц



пространство скоростей
(v_x, v_y, v_z)

Плотность изобразительных точек $Nf(v)$

Количество точек в сферическом слое
радиуса v толщиной dv

$$dN = Nf(v)4\pi v^2 dv$$

Вероятность попадания изобразительной
точки в этот слой

$$dP = \frac{dN}{N} = f(v)4\pi v^2 dv$$

плотность вероятности

$$F(v) = \frac{dP}{dv} = f(v)4\pi v^2$$

$$f(v) = \varphi_1(v_x)\varphi_2(v_y)\varphi_3(v_z)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

$$\ln f(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z)$$

$$\frac{d}{dv_x}$$

$$\frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x}$$

Распределение Максвелла

$$\frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\partial \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right)}{\partial v_x} = \frac{v_x}{v}$$

$$\frac{1}{f(v)} f'_v \frac{v_x}{v} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \varphi'_x \quad \Rightarrow \quad \frac{f'_v}{vf(v)} = \frac{\varphi'_x}{v_x \varphi(v_x)}$$

$$\frac{f'_v}{vf(v)} = \frac{\varphi'_y}{v_y \varphi(v_y)},$$

$$\frac{f'_v}{vf(v)} = \frac{\varphi'_z}{v_z \varphi(v_z)}$$

Распределение Максвелла

$$\frac{f'_v}{vf(v)} = \text{const} = -\alpha$$

$$\frac{1}{v_x \varphi(v_x)} \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x} = -\alpha$$

$$\frac{d\varphi(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x dv_x \Rightarrow \ln \varphi(v_x) = -\frac{\alpha v_x^2}{2} + \text{const} \Rightarrow \varphi(v_x) = Ae^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}$$

$$\varphi(v_y) = Ae^{-\frac{\alpha v_y^2}{2}}, \quad \varphi(v_z) = Ae^{-\frac{\alpha v_z^2}{2}}$$

$$f(v) = A^3 e^{-\frac{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}} = A^3 e^{-\frac{\alpha v^2}{2}}$$

Распределение Максвелла

$$\varphi(v_x) = Ae^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x = A \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$$

$$f(v) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha v^2}{2}}$$

Распределение Максвелла

$$\frac{m_0 \langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2} kT \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m_0}$$

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= \frac{kT}{m_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x \\ &= -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{kT}{m_0} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{m_0}{kT}$$

Распределение Максвелла

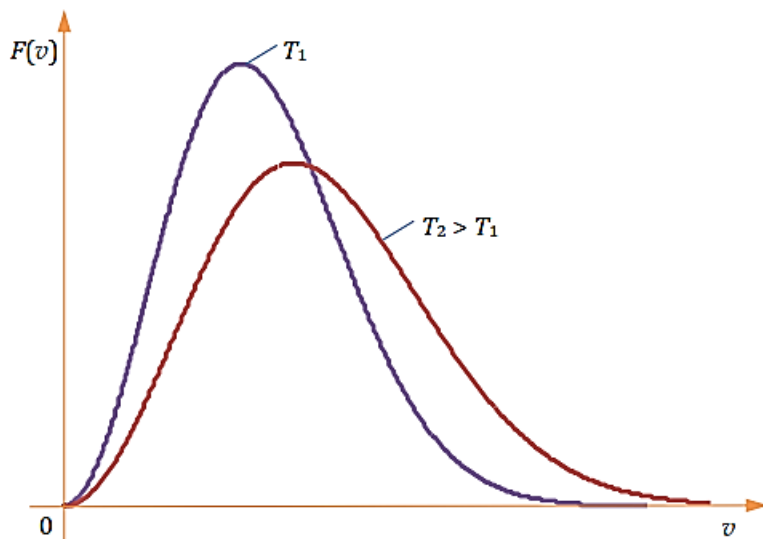
$$\alpha = \frac{m_0}{kT}$$

$$\varphi(v_x) = Ae^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}$$

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}$$

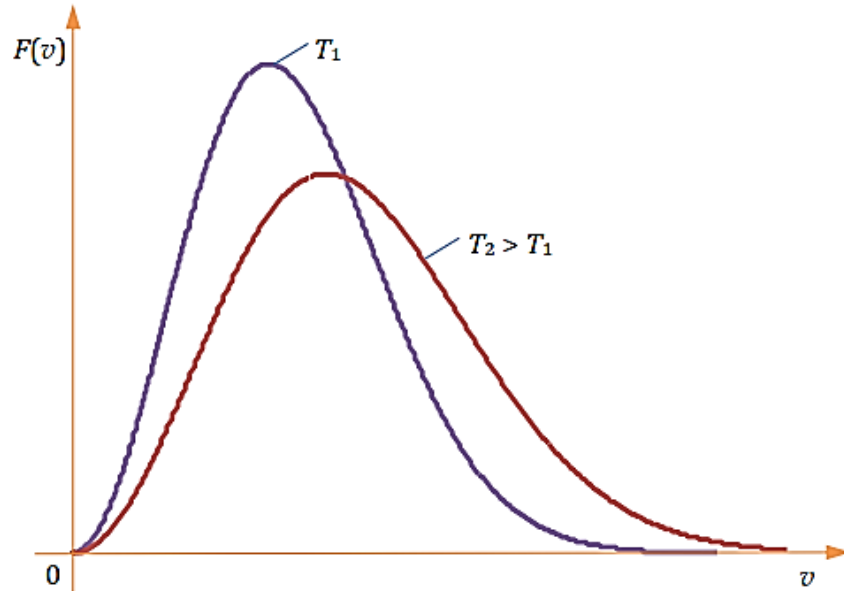
$$f(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

функция распределения Максвелла



$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

Распределение Максвелла



Физический смысл площади под этой кривой на участке (v_1, v_2) — доля молекул со скоростями от v_1 до v_2

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} F(v) dv$$

При нагревании доля молекул с большими скоростями возрастает, а доля молекул с малыми скоростями убывает.

Распределение Максвелла

Наивероятнейшая скорость молекулы идеального газа — скорость, соответствующая максимуму функции распределения

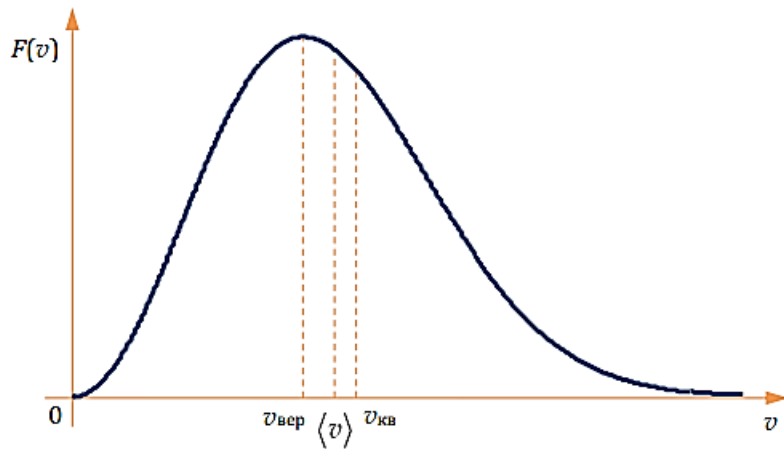
$$\left. \frac{dF(v)}{dv} \right|_{v=v_{\text{вер}}} = 0 = 2v_{\text{вер}} e^{-\frac{m_0 v_{\text{вер}}^2}{2kT}} - v_{\text{вер}}^2 \frac{2m_0 v_{\text{вер}}}{2kT} e^{-\frac{m_0 v_{\text{вер}}^2}{2kT}}$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Средняя скорость $\langle v \rangle = \int_0^\infty vF(v)dv$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Распределение Максвелла



Средняя *квадратичная*
скорость $\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 F(v) dv$

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$v_{\text{вер}} < \bar{v} < v_{\text{KB}}$$

Распределение по энергиям

Число молекул с энергиями от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ ($v; v + dv$)

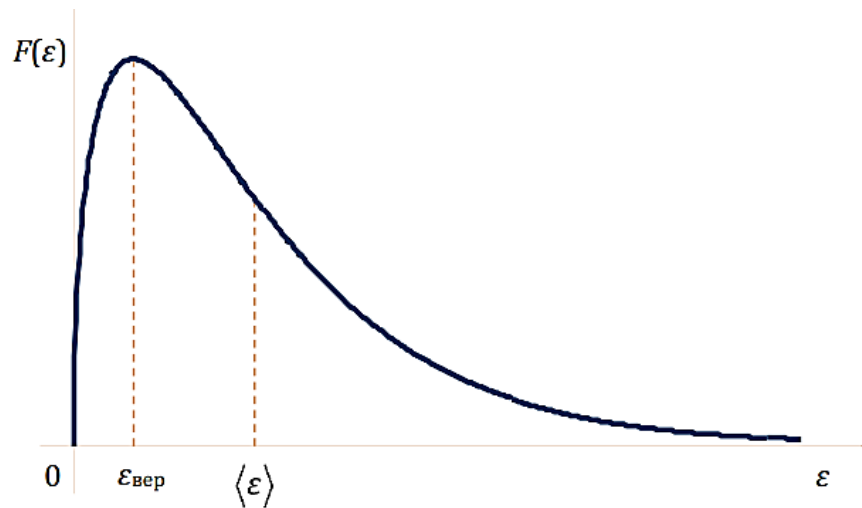
$$dN_\varepsilon = NF(\varepsilon)d\varepsilon = NF(v)dv$$

$$F(\varepsilon) = F(v) \frac{dv}{d\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}}, \quad \frac{dv}{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{2m_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \frac{2\varepsilon}{m_0} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi}{m_0} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Распределение по энергиям



$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi}{m_0} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

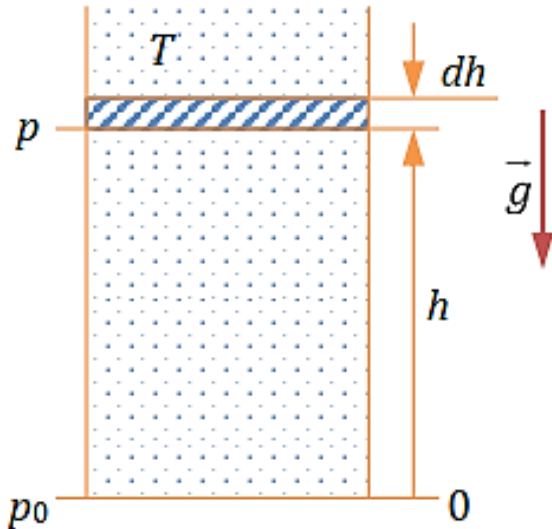
$$F(\varepsilon) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi}{m_0} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\frac{1}{2m_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$F(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

$$\varepsilon_{\text{вер}} = \frac{kT}{2} \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{3kT}{2}$$

Барометрическая формула

Рассмотрим столб идеального газа (молярная масса равна M) в однородном гравитационном поле (ускорение свободного падения g) при постоянной температуре T (*изотермическая атмосфера*)



$$dp = -\rho g dh$$
$$\rho = \frac{pM}{RT} \Rightarrow dp = -\frac{pMg}{RT} dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} h$$

Барометрическая формула

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} h$$

барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

$$p = nkT \Rightarrow n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}$$

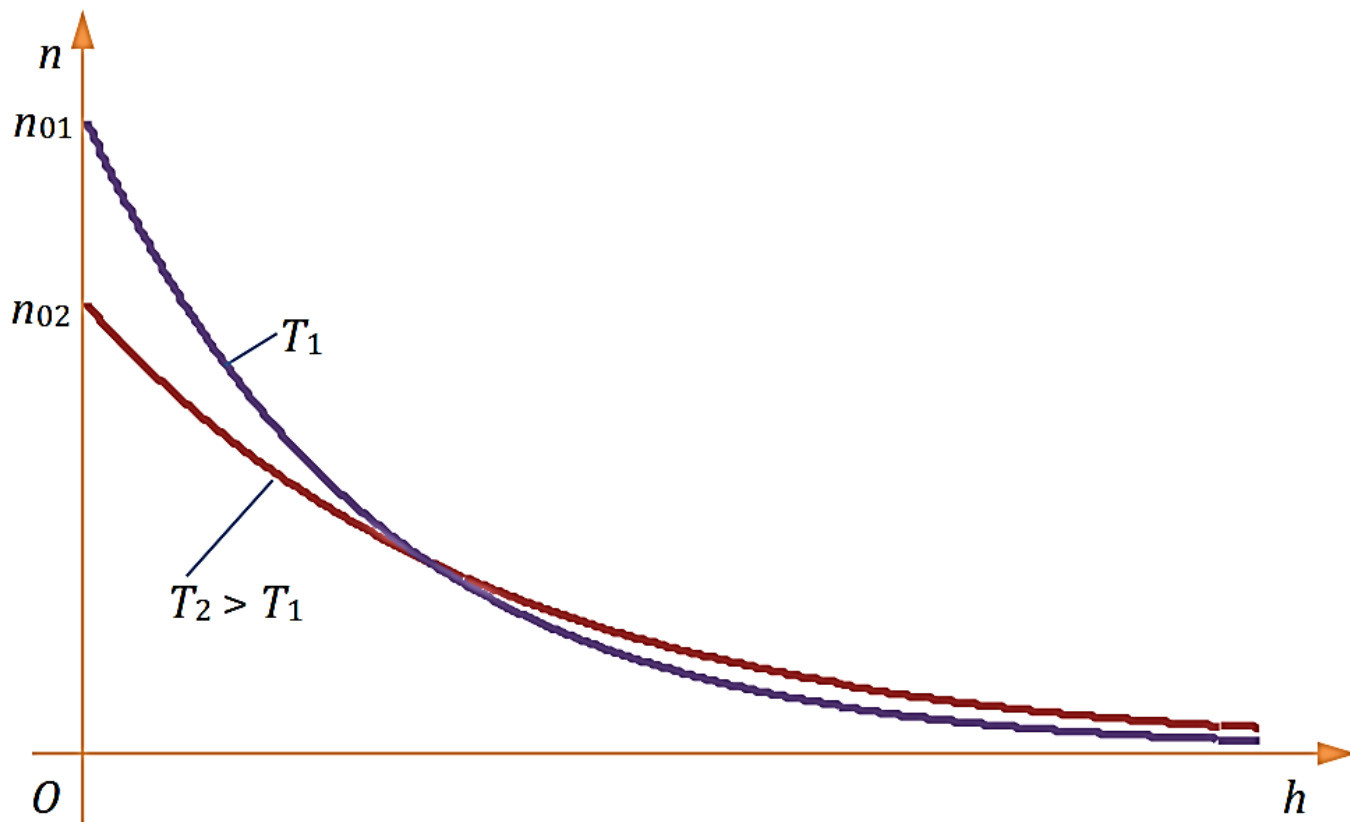
$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}$$

Барометрическая формула



Распределение Максвелла-Больцмана



$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}$$

распределение Больцмана справедливо для любого потенциального поля

Распределение Максвелла

$$dN_{\varepsilon_k} = N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z$$

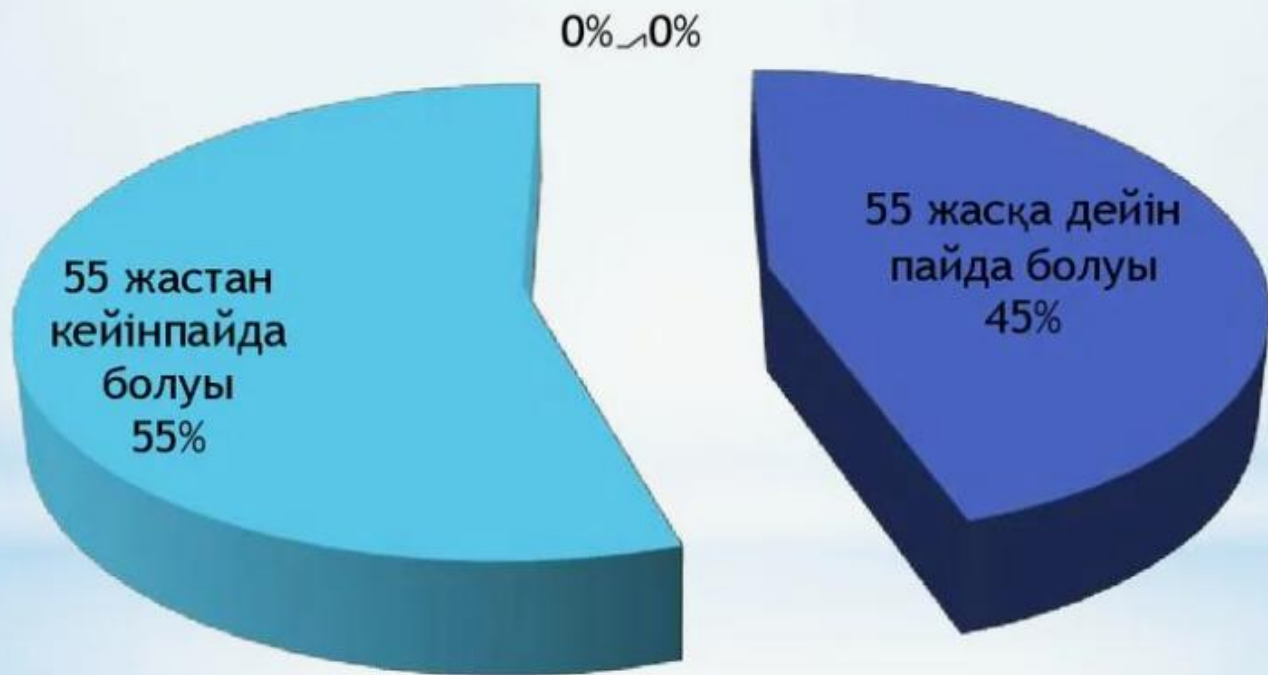
Распределение Больцмана

$$dN_{\varepsilon_p} = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} dx dy dz$$

Закон Максвелла–Больцмана (число частиц в элементе объёма фазового пространств)

$$dN = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$$

Гис будасы блокадасының кездесу жиілігі:



Спасибо
за внимание!

it's **MO** *re than a*
UNIVERSITY

nnkhvastunov@itmo.ru