

ІТМО

Лекція 8

Колебания. Волны

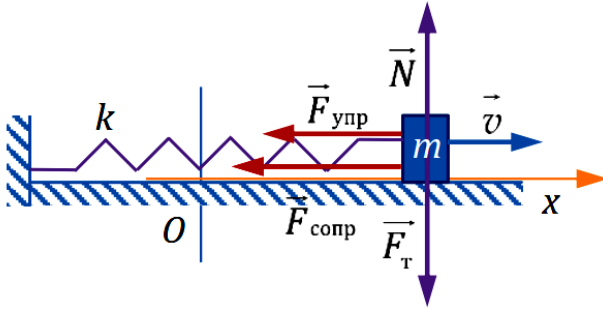
Свободные затухающие колебания.

Сила вязкого трения $\vec{F}_c = -r\vec{v}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\beta = \frac{r}{m}$$



β – коэффициент затухания

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Свободные затухающие колебания.

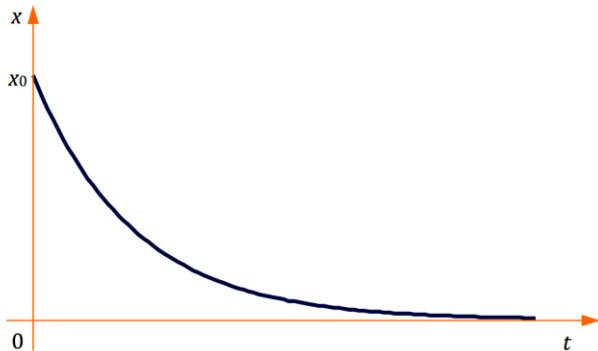
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Сильное затухание: $\beta \geq \omega_0$

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

апериодическое решение

Колебаний нет!



Свободные затухающие колебания.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

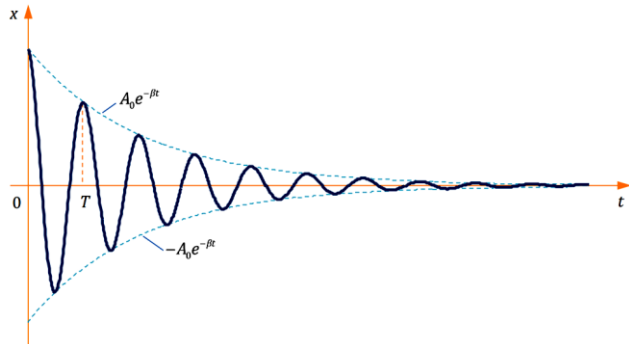
Слабое затухание: $\beta < \omega_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний

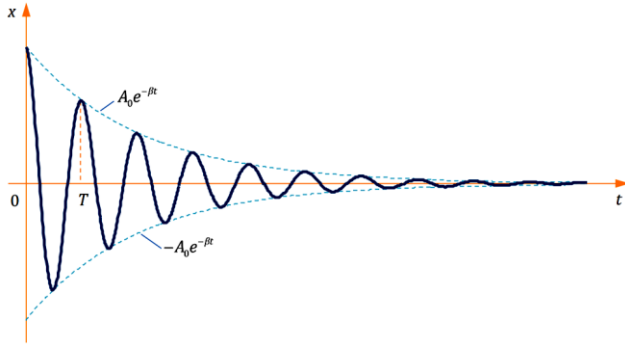
$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \text{ – период затухающих колебаний}$$



Свободные затухающие колебания.

Промежуток времени $\tau = 1/\beta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется временем релаксации.



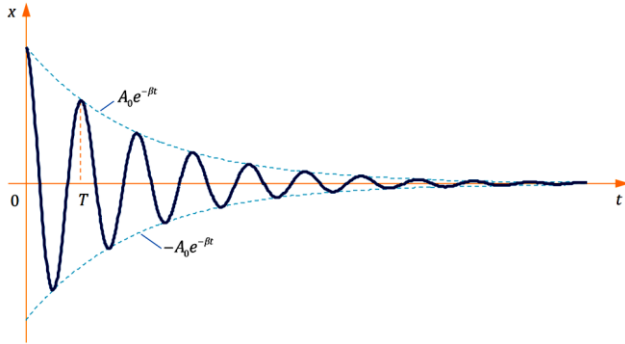
Логарифмическим декрементом затухания называется безразмерная величина δ , равная натуральному логарифму отношения значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t + T$

$$\delta = \ln \left(\frac{A(t)}{A(t + T)} \right) = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

Свободные затухающие колебания.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная физическая величина Q , равная

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) + W(t + T)} = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) + A^2(t + T)}$$



$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}$$

Вынужденные колебания.

Внешняя сила $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \Omega t$

дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний

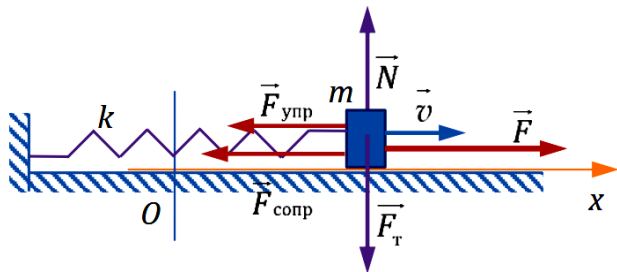
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t = f_0 \cos \Omega t$$

Слабое затухание

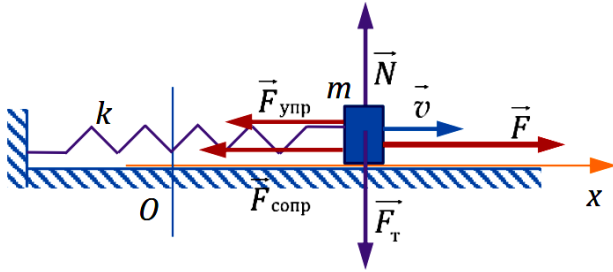
$$x = x_{\text{оду}} + x_{\text{чнУ}}$$

$$x_{\text{оду}}(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow 0$$

$$x(t) = x_{\text{чнУ}} = A \cos(\Omega t + \varphi_0)$$



Вынужденные колебания.



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

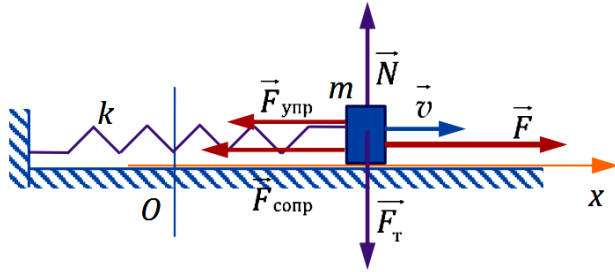
$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\Omega A \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\Omega^2 A \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$-\Omega^2 A \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta \Omega A \sin(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \cos \Omega t$$

$$\begin{aligned} f_0 \cos \Omega t &= f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_0) \\ &= f_0 [\cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \varphi_0 + \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin \varphi_0] \end{aligned}$$

Вынужденные колебания.



$$-\Omega^2 A \cos(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$= f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \varphi_0$$

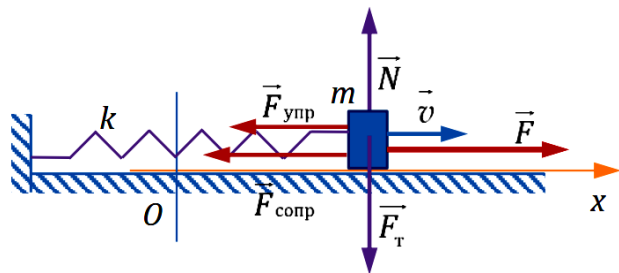
$$-2\beta\Omega A \sin(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin \varphi_0$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 A + \omega_0^2 A = f_0 \cos \varphi_0 \\ -2\beta\Omega A = f_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на φ_0

Вынужденные колебания.



$$\begin{cases} -\Omega^2 A + \omega_0^2 A = f_0 \cos \varphi_0 \\ -2\beta\Omega A = f_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \varphi_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}} \\ &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}} \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \end{aligned}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

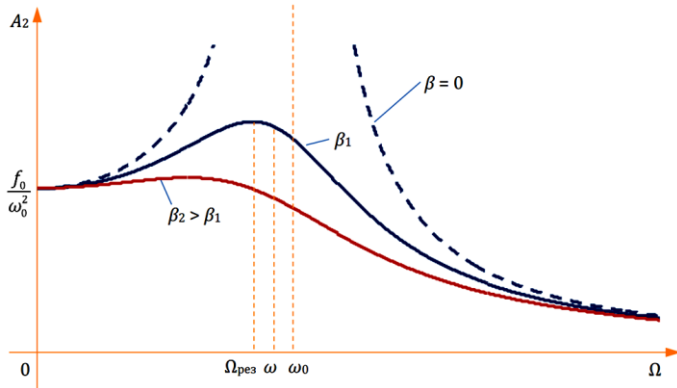
Вынужденные колебания.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$A(\Omega = 0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad A(\Omega \rightarrow \infty) = 0$$

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 = \Omega(2\beta^2 - \omega_0^2 + \Omega^2)$$

$$\text{резонансная циклическая частота } \Omega_{\text{РЕЗ}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



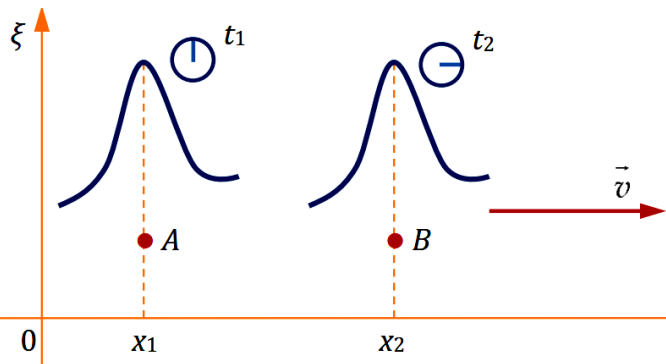
резонанс — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте

Механические волны.



Волна — любое распространяющееся в пространстве возмущение, т. е. изменение какой-либо физической величины с течением времени

величина ξ зависит от времени и это возмущение распространяется со скоростью $\vec{v}$ — скоростью распространения волны



$$\xi = \xi(x, t)$$

Из точки A в точку B волна придёт через время

$$t_2 - t_1$$

Механические волны.



$$\xi(x_2, t_2) = \xi(x_1, t_1)$$

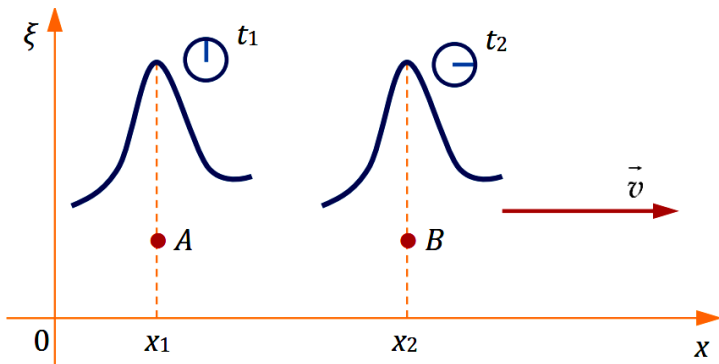
$$\xi(x_2, t_2) = \xi\left(x_1, t_2 - \frac{x_2 - x_1}{v}\right)$$

Пусть $x_1 = 0$

$$\xi(0, t) = f(t), \quad \xi(x, t) = \xi\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Уравнение бегущей волны

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$



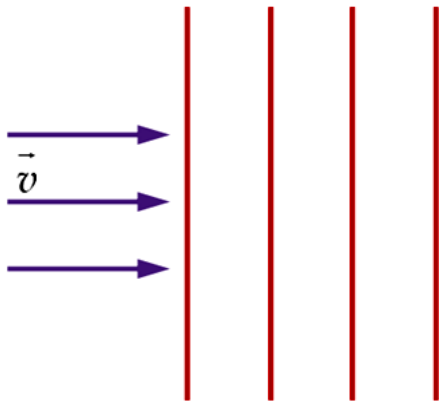
$t - \frac{x}{v}$ — фаза волны

Механические волны.



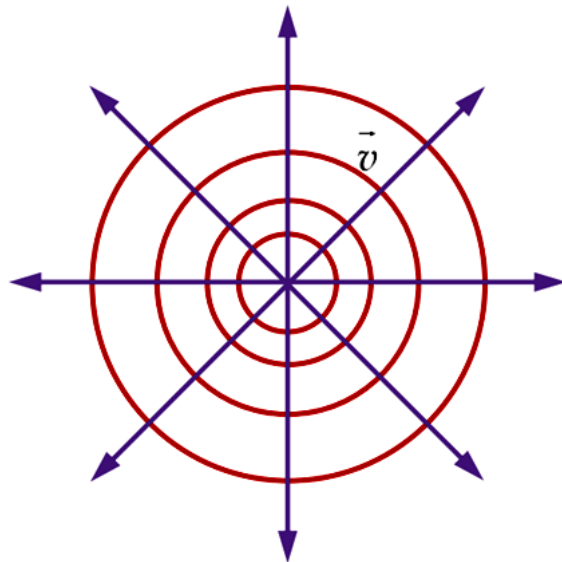
Волновой фронт (волновая поверхность) — геометрическое место точек, в которых в один и тот же момент времени колебания происходят в одинаковой фазе

Плоская волна



волновая поверхность — плоскость

Сферическая волна



волновая поверхность — сфера

Механические волны.

ІТМО

Волны

продольные

колебания в направлении
распространения волны

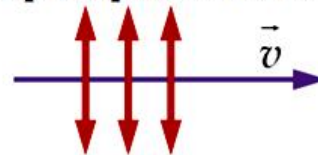


ПРИМЕРЫ

Звуковая волна

поперечные

колебания в направлении,
перпендикулярном направлению
распространения волны



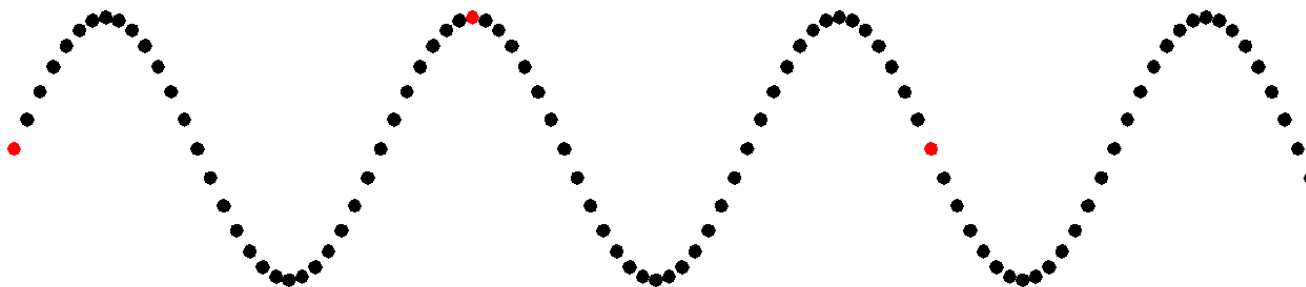
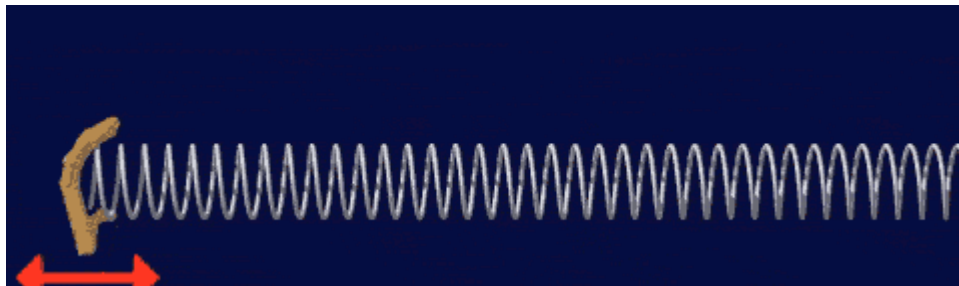
Электромагнитная волна

Волны на шнуре

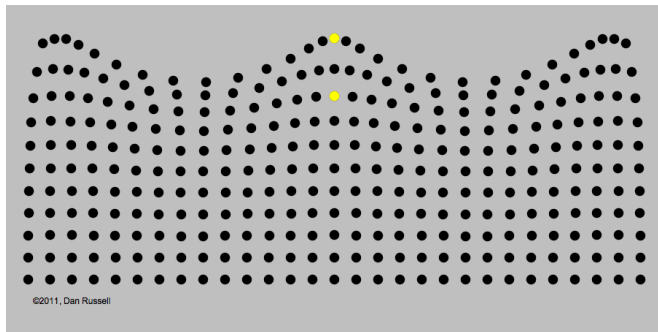
Волны на поверхности жидкости

Механические волны.

ІТМО



Гармоническая волна



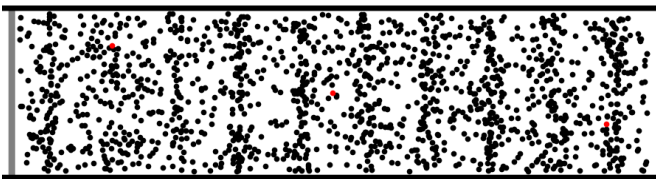
Гармоническая (монохроматическая, синусоидальная) волна — процесс распространения гармонических колебаний в пространстве.

Уравнение гармонических колебаний

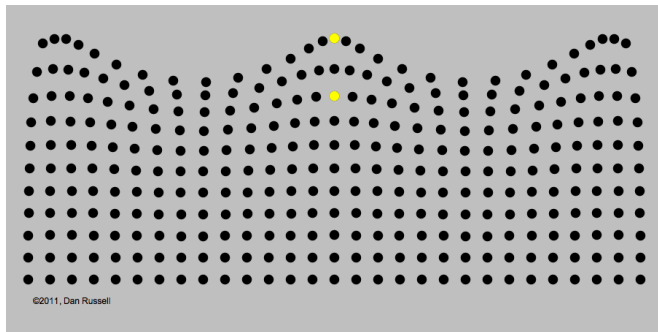
$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

уравнение плоской бегущей гармонической волны

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= f\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right) \\ &= A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] \end{aligned}$$



Гармоническая волна



Характеристики гармонической волны

Скорость v

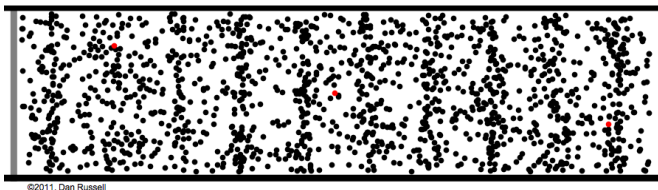
Начальная фаза φ_0

Циклическая частота ω

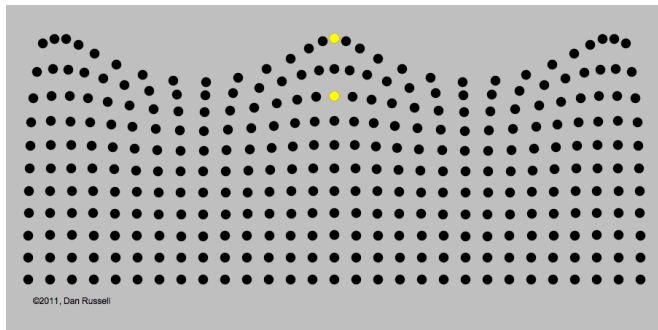
Период $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Частота $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Амплитуда A — максимальное значение колеблющейся величины



Гармоническая волна



Длина волны — расстояние, которое волна проходит за время одного полного колебания

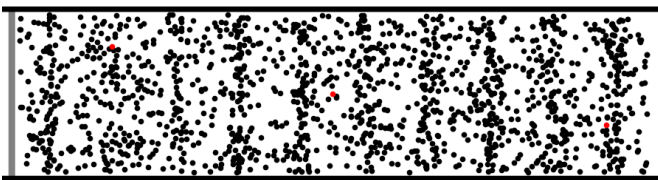
$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega}$$

Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi v}{v}$$

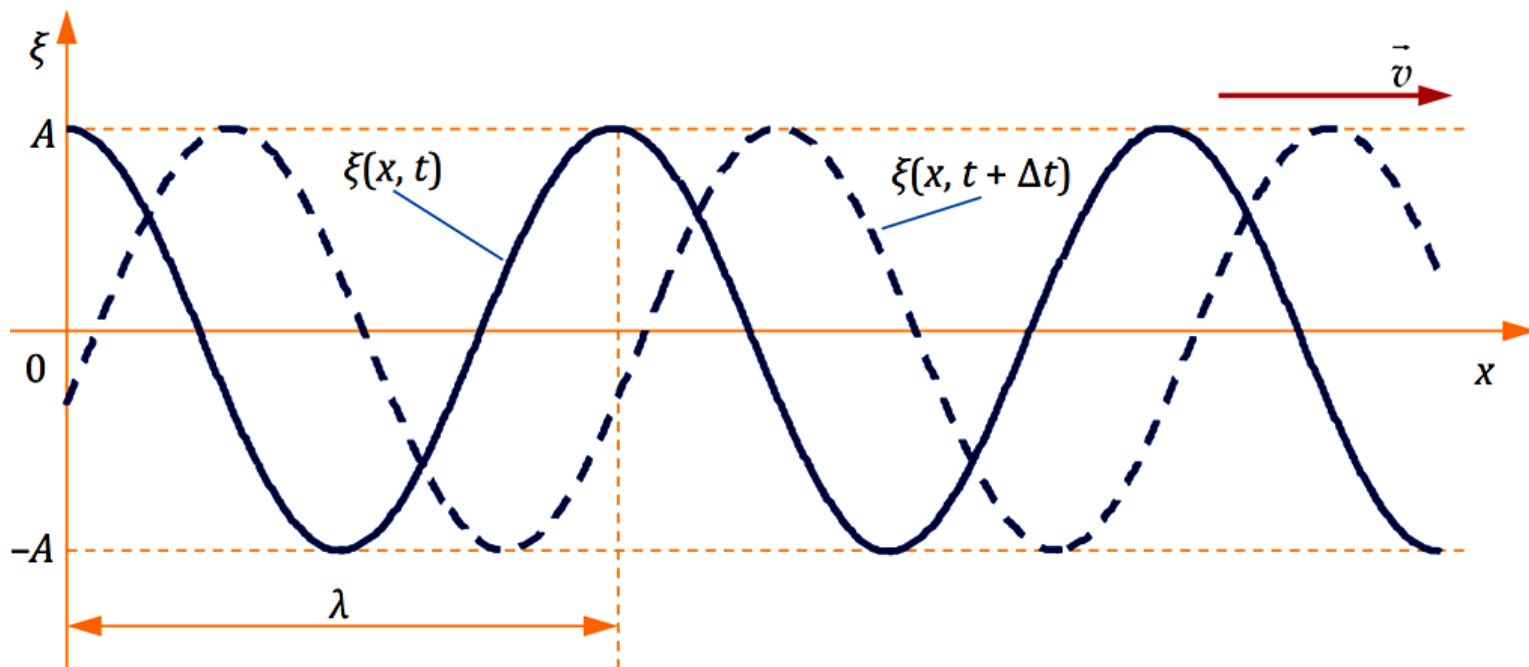
$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \vec{k} \parallel \vec{v}$$

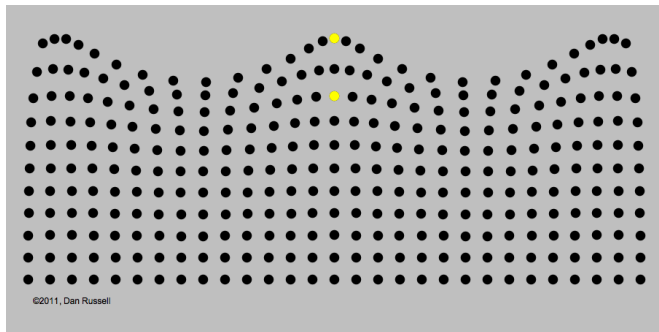


Гармоническая волна

«Мгновенная фотография» гармонической волны



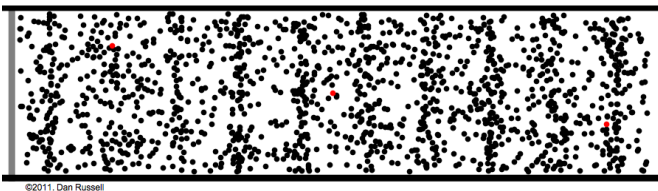
Гармоническая волна



Пусть фаза волны $\varphi = \omega t - kx$

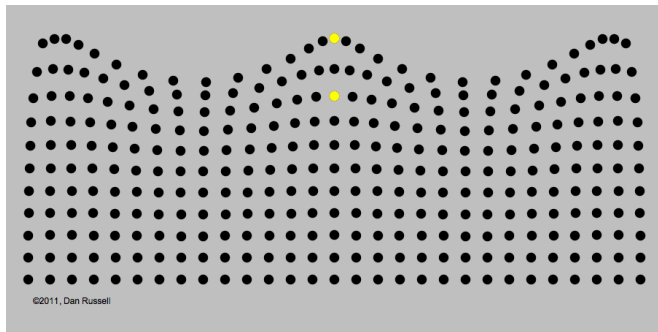
Скорость перемещения волновой поверхности
 $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$ (скорость перемещения плоскости)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega t - \text{const}}{k} \right) = \frac{\omega}{k}$$



$v = \frac{\omega}{k}$ является скоростью волновой поверхности с заданной фазой и поэтому называется фазовой скоростью

Гармоническая волна



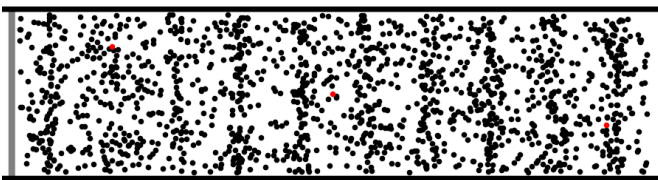
Скорость распространения упругих продольных волн в неограниченной среде

$$v_{||} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \quad E' = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$$

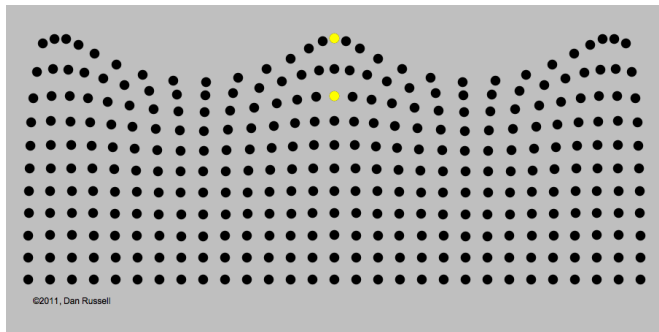
E' – эффективный модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона

Скорость распространения упругих поперечных волн в неограниченной среде

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$



Гармоническая волна

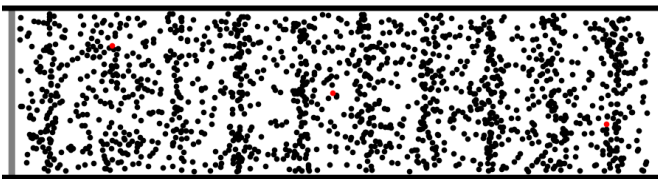


Фазовая скорость волны зависит от свойств среды, в которой она распространяется

Скорости распространения упругих продольных и поперечных волн в твердых телах, имеющих форму стержня и являющихся однородной средой

$$v_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

E – модуль Юнга и G – модуль сдвига для твердых тел (стержней); ρ – плотность среды

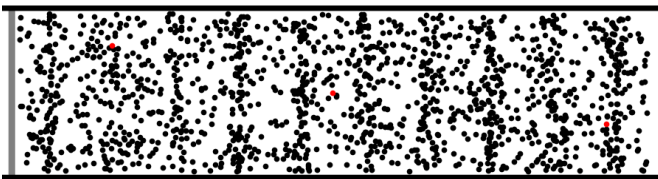
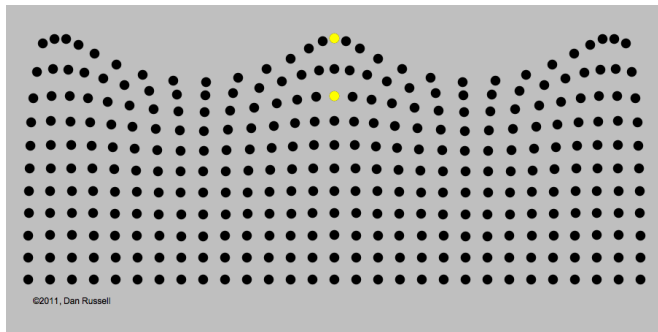


Гармоническая волна

Скорость продольных волн в жидкостях или газах

$$v_{||} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

p – давление жидкости (газа); ρ – плотность невозмущенной среды

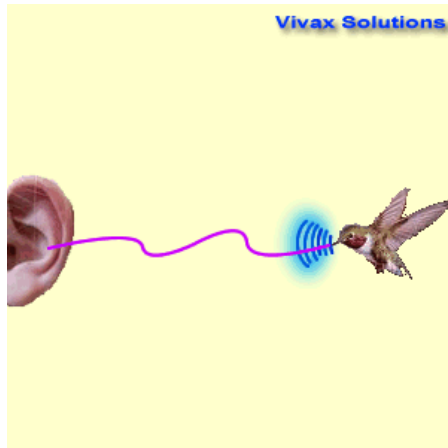


Эффект Доплера

ІТМО



Эффектом Доплера называют изменение частоты и, соответственно, длины волны колебаний, воспринимаемых наблюдателем (приемником), при движении источника колебаний и наблюдателя относительно друг друга



Источник и приёмник покоятся относительно среды

$$\lambda = vT = \frac{v}{v_0}$$

волна достигнет приемника и вызовет колебания его звукочувствительного элемента с частотой

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{vT} = \frac{1}{T} = \nu_0$$

Эффект Доплера

ІТМО



Источник приближается к приемнику. Длина волны в направлении движения сократится $\lambda' = \lambda - v_{\text{ист}} T$

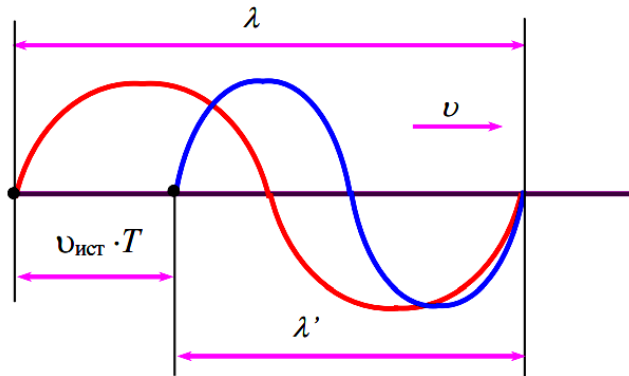
$$\nu = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{\text{ист}})T} = \frac{v}{v - v_{\text{ист}}} \nu_0$$

Приемник приближается к источнику

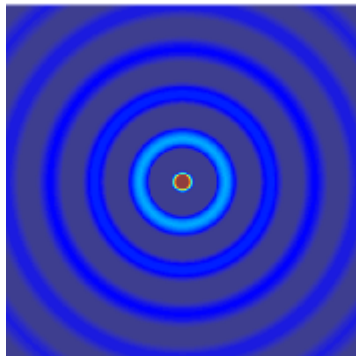
$$\nu = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{v + v_{\text{пр}}}{vT} = \frac{v + v_{\text{пр}}}{v} \nu_0$$

Источник и приемник движутся относительно друг друга

$$\nu = \frac{v \pm v_{\text{пр}}}{v \mp v_{\text{ист}}} \nu_0$$



Волновое уравнение

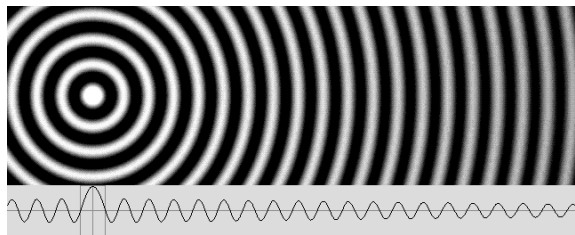


Волновое уравнение – дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее распространение волн в однородной изотропной среде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

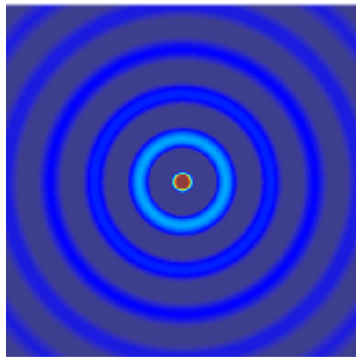
для плоской волны волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$



принцип суперпозиции упругих волн:
резльтирующее смещение частиц в каждый момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы среды, участвуя в распространении каждой из слагаемых волн

Энергия механической волны



Кинетическая энергия, заключенная в малом объеме ΔV среды

$$E_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V$$

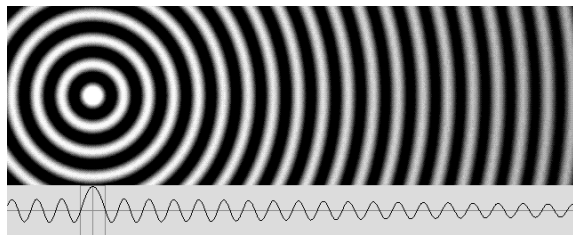
Потенциальная энергия

$$E_p = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

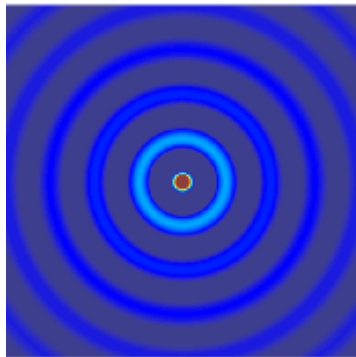
Полная энергия

$$E = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V$$

$$\text{Плотность энергии } w = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$



Энергия механической волны

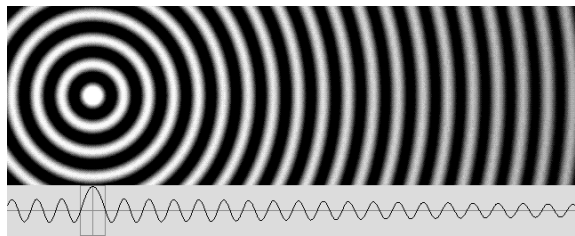


$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = kA \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{\omega}{v} A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

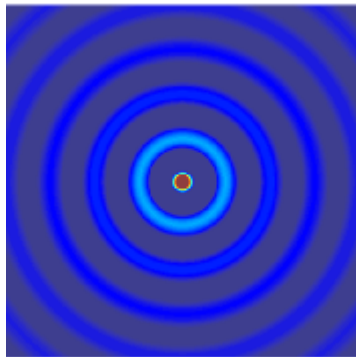
$$w = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$



Среднее по времени значение плотности энергии в данной точке среды

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Энергия механической волны



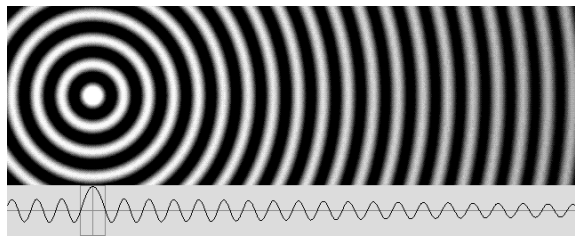
Волна переносит энергию

Вектор Умова – вектор плотности потока энергии, численно равный потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке, перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия.

$$\vec{S} = w\vec{v}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \vec{v}$$

Интенсивность волны в данной точке I – среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.



БУДДИЙСКОЕ ПРАВИЛО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ:

ІТМО

У вас есть проблема?

ДА

Можете ли вы ее решить?

НЕТ

ДА

НЕТ

Тогда не волнуйтесь



**Спасибо
за внимание!**

ITMO *re than a*
UNIVERSITY

nnkhvastunov@itmo.ru