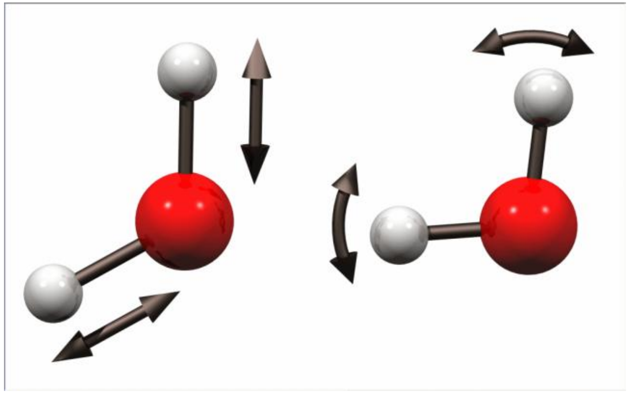
Лекция 7

Колебания

Свободные колебания. Характеристики



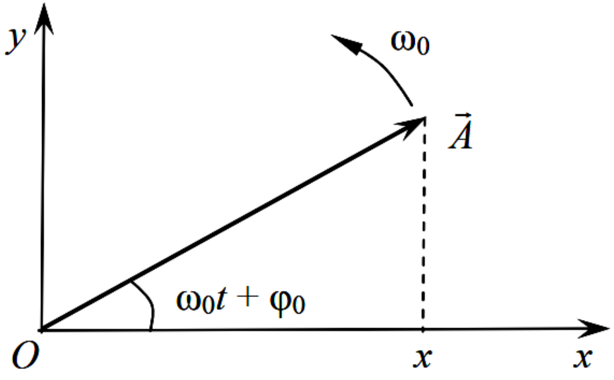
Колебательное движение (*колебание*) – движение материального объекта, обладающее той или иной степенью повторяемости во времени

Свободные колебания (или *собственные*) – колебания, совершающиеся в замкнутой системе за счет первоначально сообщенной энергии и без внешних воздействий

Гармонические колебания – колебания, при которых физические величины, их описывающие, изменяются по закону синуса или косинуса

Физическая природа колебаний может быть разной – различают механические, электромагнитные и другие колебания

Свободные колебания. Характеристики



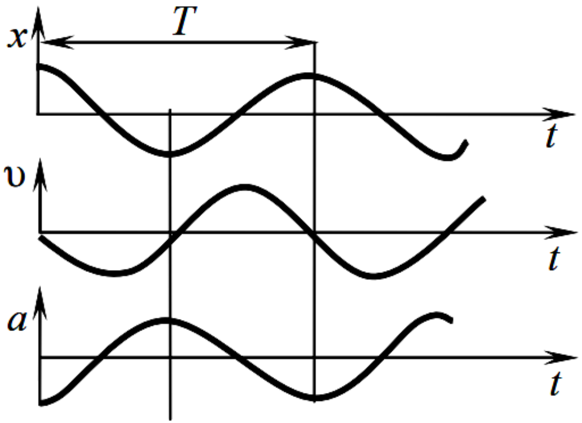
$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A – *амплитуда колебания* – максимальное значение колеблющейся величины; ω_0 – круговая (циклическая) частота; φ_0 – начальная *фаза колебания* в момент времени $t = 0$; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебания в момент времени t

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \nu = \frac{1}{T_0}\ [\text{Гц}]$$

Периодом колебаний T_0 называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются состояния колеблющейся системы (совершается одно полное колебание), и фаза колебания получает приращение 2π

Уравнение гармонических колебаний

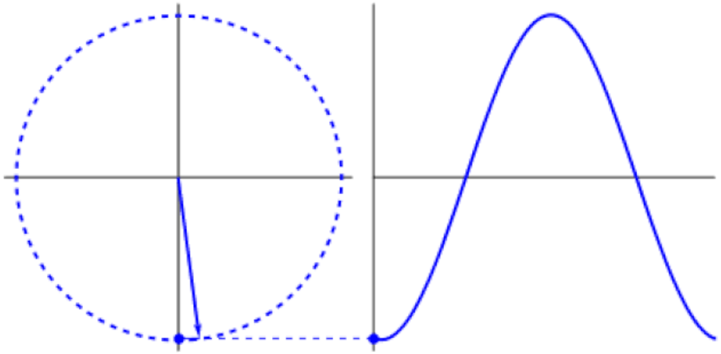


$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

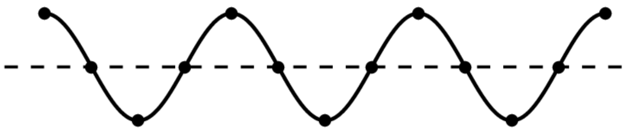
$$a = -\omega_0^2 x$$



$$\tilde{s} = A\, e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$$s = \mathrm{Re}(\tilde{s}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Уравнение гармонических колебаний

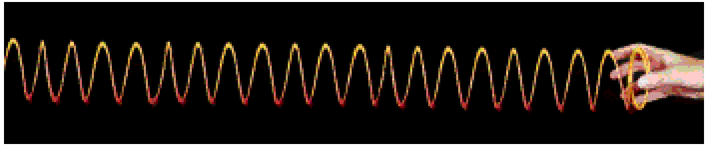


Дифференциальное уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

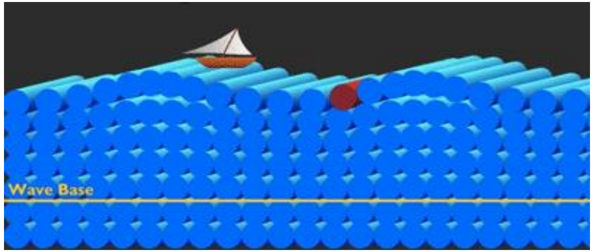
Проекция силы, действующей на колеблющуюся материальную точку массой m

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x = -kx$$



сила, действующая на частицу, совершающую гармонические колебания, является *квазиупругой* и называется *возвращающей силой*, так как пропорциональна смещению материальной точки и направлена в сторону, противоположную смещению (к положению равновесия)

Уравнение гармонических колебаний



$$m\omega_0^2 x = kx \Rightarrow \quad k = m\omega_0^2$$

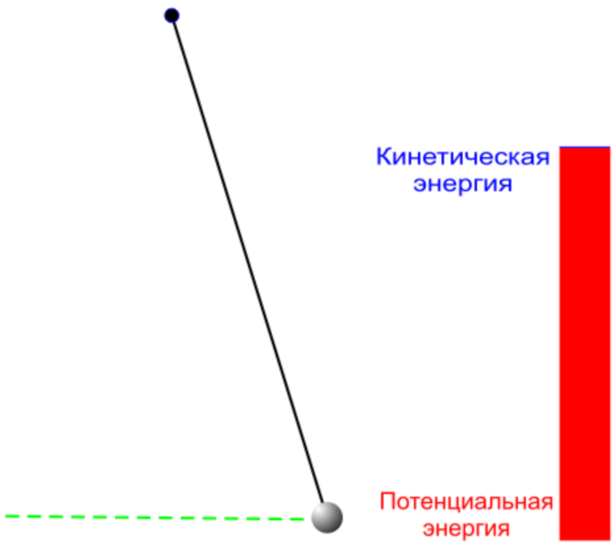
k – коэффициент пропорциональности

Гармоническим (линейным) осциллятором называется система, совершающая колебания под действием возвращающей силы и описываемым дифференциальным уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

Собственная циклическая частота осциллятора

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Энергия гармонических колебаний



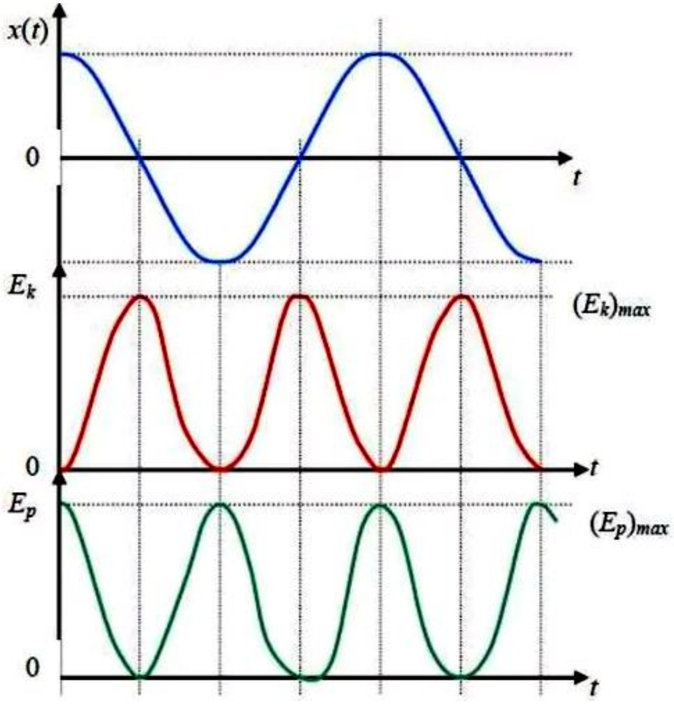
Кинетическая энергия линейного осциллятора

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{m}{4} A^2\omega_0^2 \{1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)]\}$$

Потенциальную энергию осциллятора наиболее удобно отсчитывать от положения равновесия (координата $x = 0$ соответствует нулевому уровню для потенциальной энергии)

$$E_p = \int_0^x F dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{kA^2}{4} \{1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)]\}$$
$$= \frac{m}{4} A^2\omega_0^2 \{1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)]\}$$

Энергия гармонических колебаний



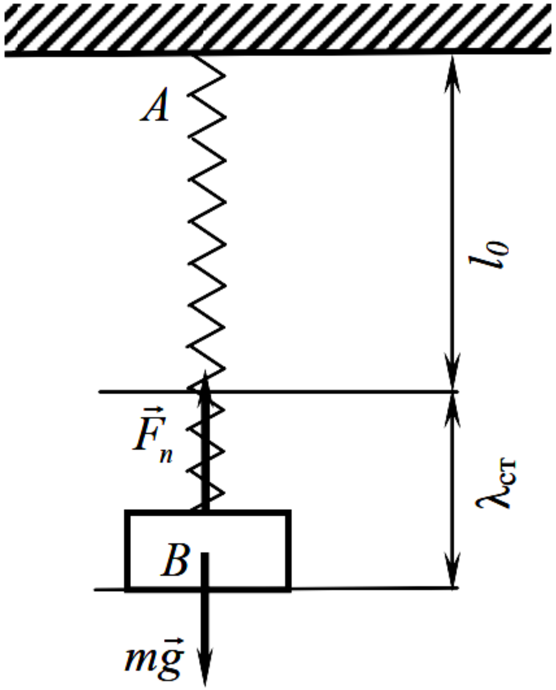
Полная механическая энергия осциллятора сохраняется

$$E = E_K + E_p = \mathrm{const}$$
$$= \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 \{1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)]\}$$
$$+ \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 \{1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)]\} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

средние значения кинетической и потенциальной энергий

$$< E_K > = < E_p > = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \begin{cases} < \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) > \\ < \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) > \end{cases}$$
$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} = \frac{kA^2}{4}$$

Маятники



Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием силы упругости

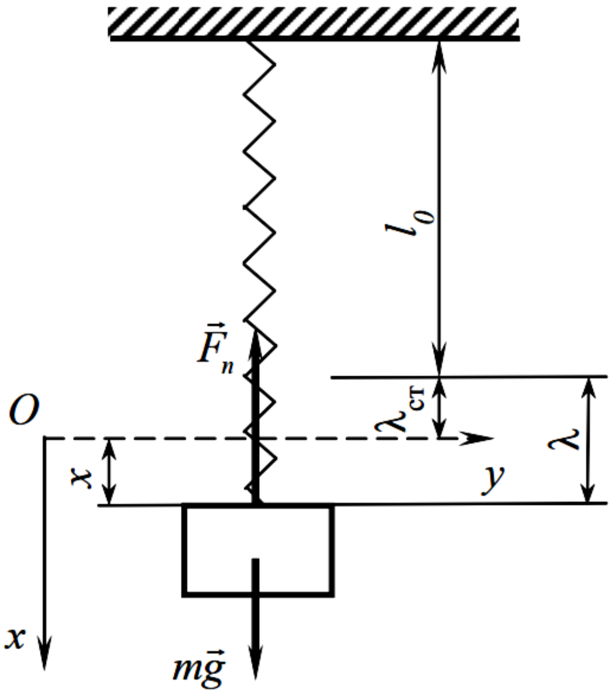
$$mg = k\lambda_{ст} \Rightarrow \lambda_{ст} = \frac{m}{k}g$$

Если грузу придать движение по вертикали, то будем наблюдать свободные гармонические колебания

В произвольный момент движения груза деформация пружины

$$\lambda = \lambda_{ст} + x$$

Маятники



$$F = k\lambda = k\lambda_{ст} + kx$$

Если грузу придать движение по вертикали, то будем наблюдать свободные гармонические колебания

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - F = mg - k\lambda_{ст} - kx$$

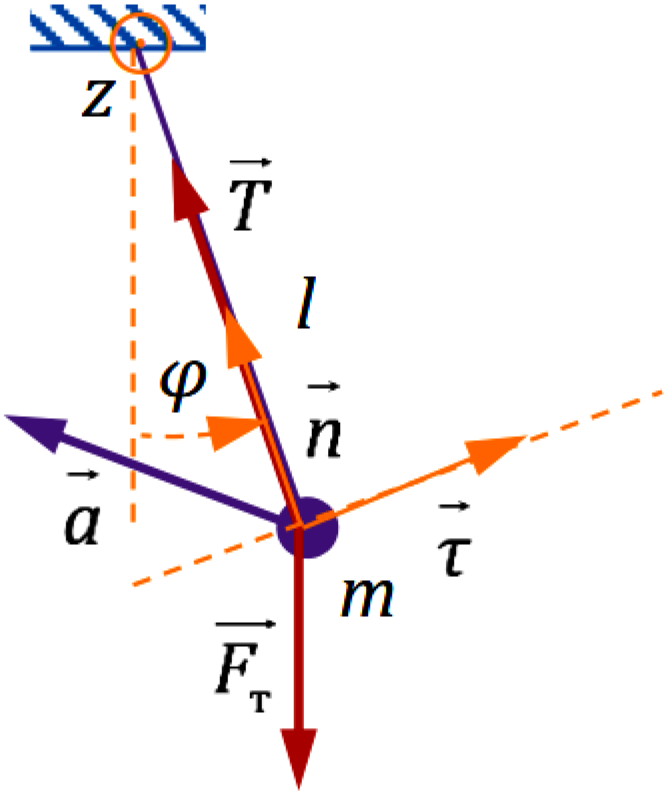
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g - \frac{k}{m}\lambda_{ст} = g - \frac{k}{m}\frac{m}{k}g = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Потенциальная энергия пружинного маятника

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

Маятники



Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в однородном гравитационном поле

$$ma_n = T - mg\cos\varphi \qquad a_\tau = \varepsilon_z l, \qquad \varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$
$$ma_\tau = -mg\sin\varphi$$

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2}l = -mg\sin\varphi \approx -mg\varphi$$

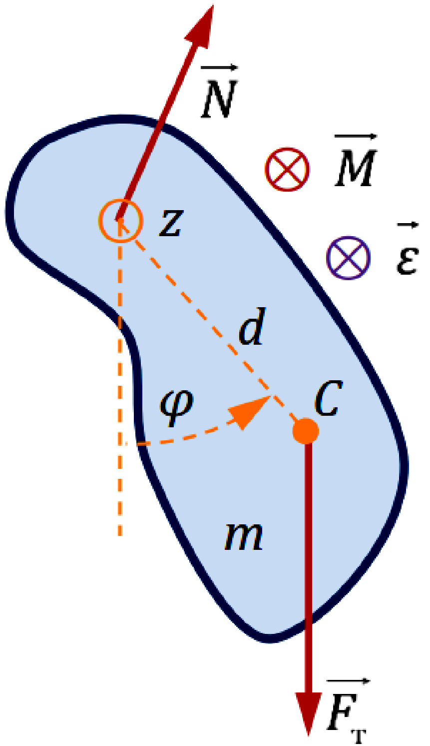
дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Маятники

ИТМО



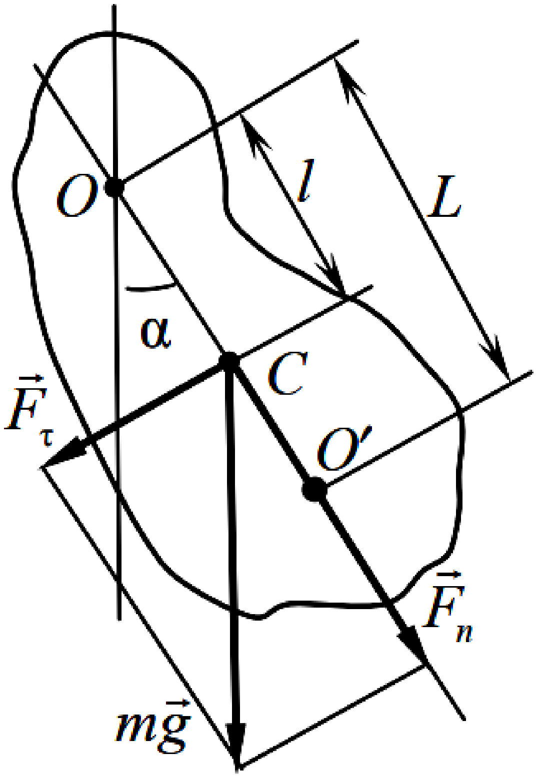
Физический маятник – твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точки этого тела, не являющиеся его центром масс, в однородном гравитационном поле.

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{m\vec{g}} + \vec{M}_{\vec{N}}$$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi \approx -mgd\,\varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Маятники

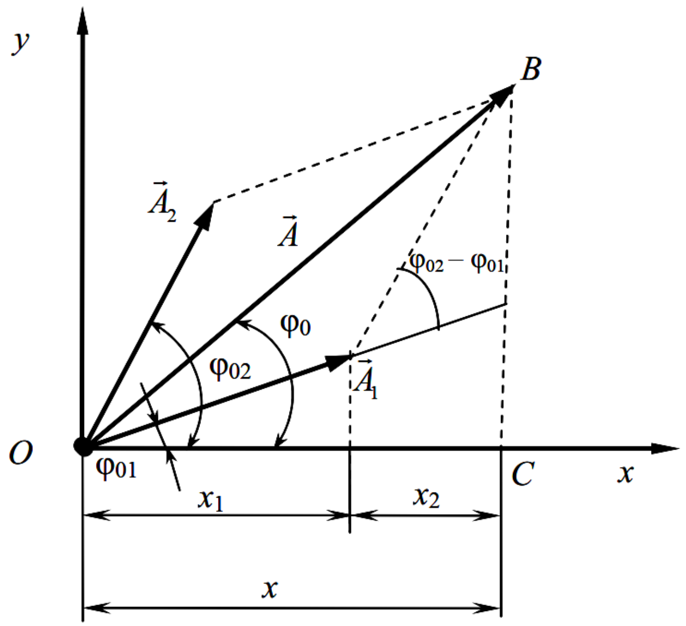


Приведённая длина физического маятника – длина математического маятника с периодом собственных колебаний, равным периоду собственных колебаний данного физического маятника

$$L = \frac{I}{ml} = \frac{I}{md}$$

Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстояние приведенной длины L, называется *центром качаний физического маятника*. Точка подвеса O и центр качания O' обладают свойством взаимности. При переносе точки подвеса в центр качания период колебаний не изменится, поскольку прежняя точка подвеса становится новым центром качания O'

Сложение гармонических колебаний



Сложение двух прямолинейных одинаково направленных колебаний одинаковой частоты
$x_1 = A_1 \cos\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$,
$x_2 = A_2 \cos\varphi_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$

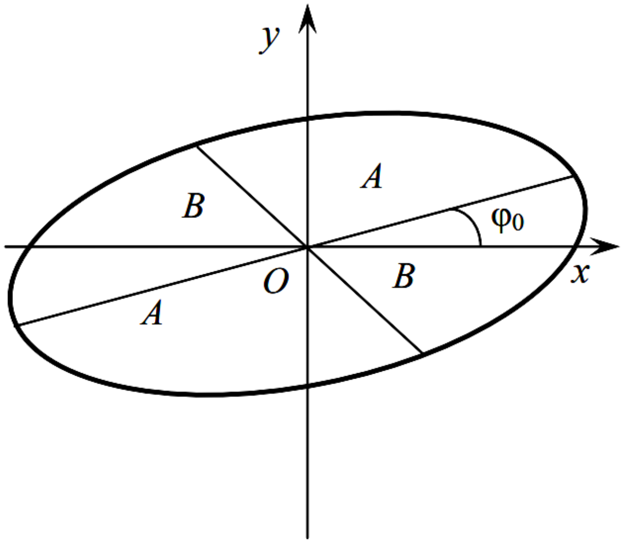
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{BC}{OC} = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}$$

Сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты есть гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Сложение гармонических колебаний



Два гармонических колебания одинаковой частоты происходят во взаимно перпендикулярных направлениях

$$x = A\cos\omega_0 t\,, \qquad y = B\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{x}{A} = \cos\omega_0 t,$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \cos\omega_0 t\cos\varphi_0 - \sin\omega_0 t\sin\varphi_0$$

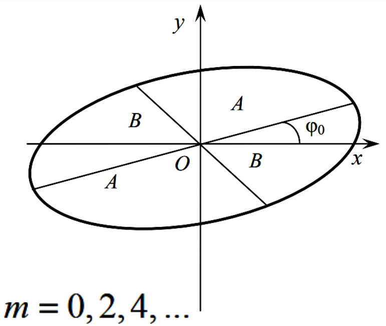
$$\sin\omega_0 t = \sqrt{1 - x^2/A^2}$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi_0 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\,\sin\varphi_0$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0$$

Сложение гармонических колебаний

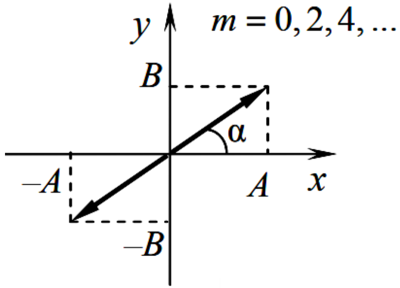
ИТМО



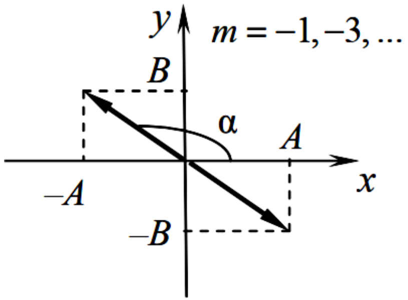
уравнение эллипса, ориентация осей которого зависит от разности фаз φ_0 и в общем случае не совпадает с координатными осями x и y.

Колебания называются *эллиптически поляризованными*

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0$$



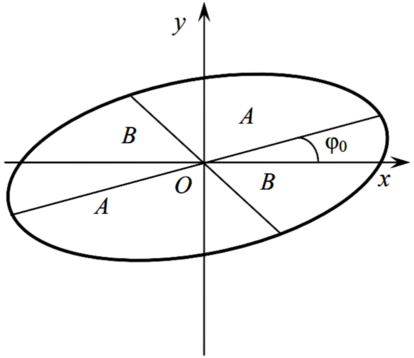
$$\varphi_0 = m\pi \Rightarrow \left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{B}{A}x = \pm(\operatorname{tg}\alpha)\cdot x$$

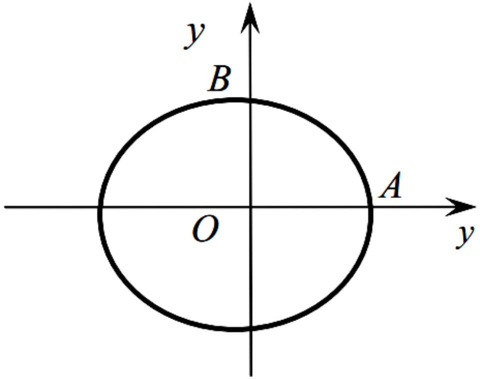


Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω_0 и амплитудой $\sqrt{A^2+B^2}$ и совершается вдоль прямой, составляющей с осью x угол α

Такие колебания называются *линейно поляризованными колебаниями*

Сложение гармонических колебаний





$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0$$

$$\varphi_0 = \frac{(2m+1)\pi}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам A и B

Если $A = B$, то эллипс вырождается в окружность, и такие колебания называются *циркулярно-поляризованными* или колебаниями, поляризованными по кругу

Сложение гармонических колебаний

взаимно перпендикулярные колебания с циклическими частотами $p\omega_0$ и $q\omega_0$

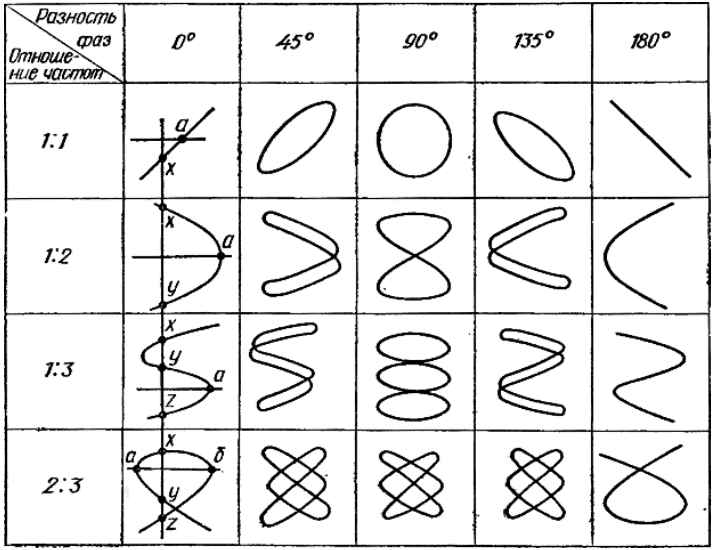
$$x = A\cos(p\omega_0 t + \varphi_{01}), \qquad y = B\cos(q\omega_0 t + \varphi_{02})$$

Пусть $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0, p = 2, q = 1$

$$x = A\cos(2\omega_0 t), \qquad y = B\cos(\omega_0 t)$$

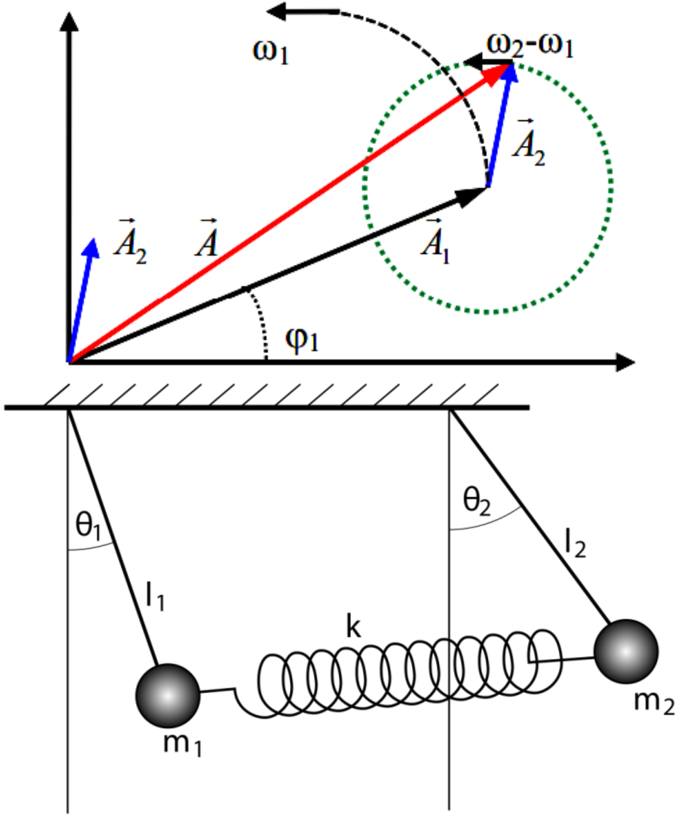
$$x = A\,(2\cos^2\omega_0 t - 1) = \frac{2A}{B^2}y^2 - A$$

уравнение параболы



Замкнутые траектории, описываемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, возникают тогда, когда отношение частот складываемых колебаний есть рациональное число, называются такие траектории **фигурами Лиссажу**

Сложение гармонических колебаний



Сложение гармонических колебаний одного направления с близкими частотами

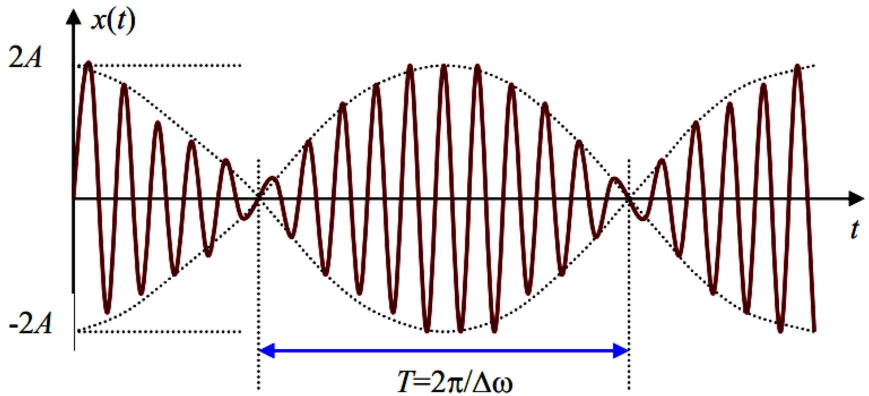
$$x_1 = A\cos\omega_1 t\,, x_2 = A\cos\omega_2 t\,,\quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1, \omega_2$$

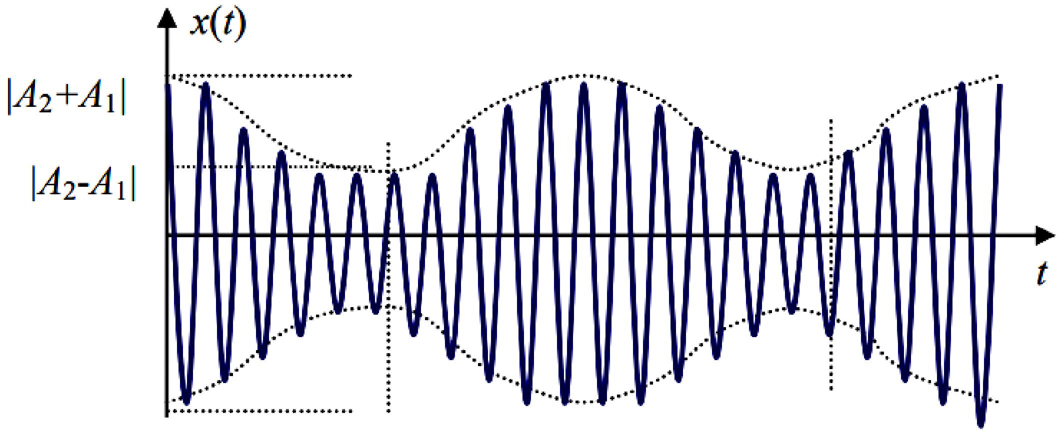
$$x = x_1 + x_2 = A\{\cos\omega_1 t + \cos[(\omega_1 + \Delta\omega)t]\}$$
$$= 2A\cos\frac{(\omega_1 + \Delta\omega)t - \omega_1 t}{2}\cos\frac{(\omega_1 + \Delta\omega)t + \omega_1 t}{2}$$
$$\approx 2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\cos\omega_1 t$$

$$a(t) = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right|$$

Биения – **колебания** с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие при сложении двух гармонических **колебаний** с близкими частотами

Сложение гармонических колебаний






- Кто заколебался?
-

Спасибо за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY

nnkhvastunov@itmo.ru