

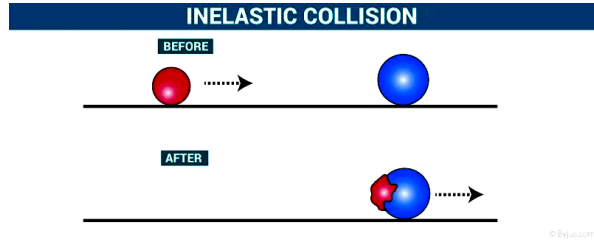
ІІТМО

Лекция 5

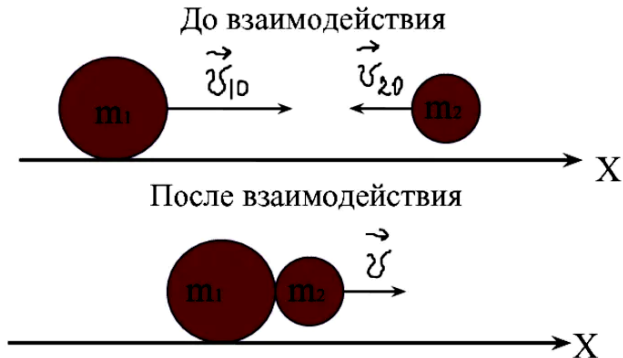
Удар. Реактивное движение.

Тяготение.

Абсолютно неупругий удар



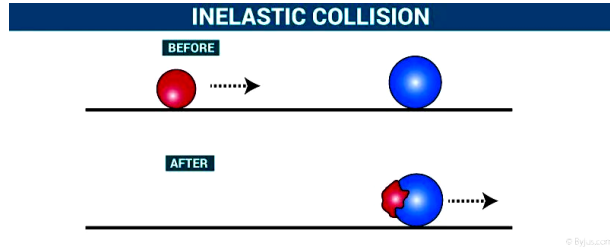
Абсолютно неупругий удар – удар, после которого соударяющиеся тела движутся как единое целое



При неупругом ударе импульс системы соударяющихся тел сохраняется, а механическая энергия – нет. Происходит диссипация энергии

Абсолютно неупругое центральное соударение двух шаров. (Центральное соударение – соударение, перед которым центры шаров движутся по прямой, их соединяющей.)

Абсолютно неупругий удар

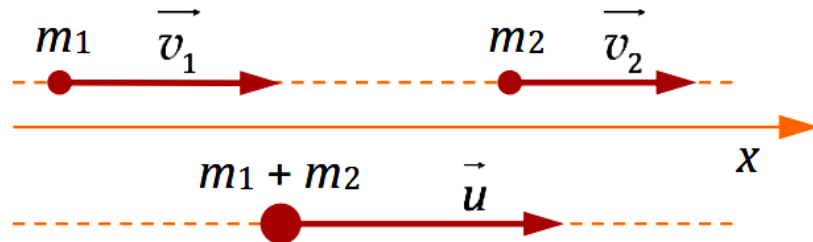


$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

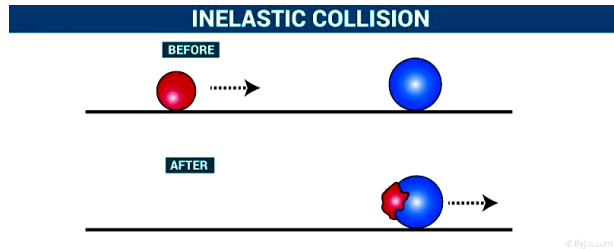
Доля η механической энергии, перешедшей во внутреннюю при ударе

$$\eta = \frac{|\Delta W_k|}{W_{k1}} = \frac{W_{k1} - W_{k2}}{W_{k1}} = 1 - \frac{W_{k2}}{W_{k1}}$$



$$\eta = 1 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$$

Абсолютно неупругий удар

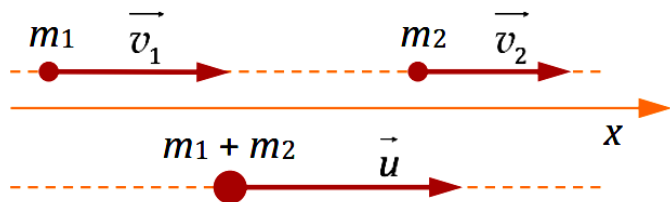


шары двигались в одну сторону

$$\eta = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$$

шары двигались в разные стороны

$$\eta = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$$

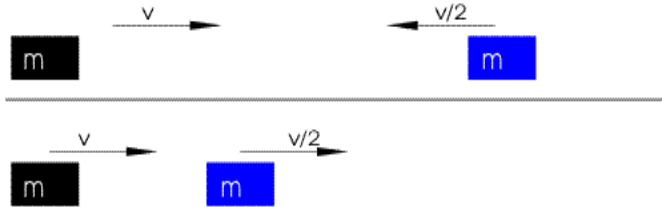


второй шар покоился

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Абсолютно упругий удар

PHYSICS-ANIMATIONS.COM

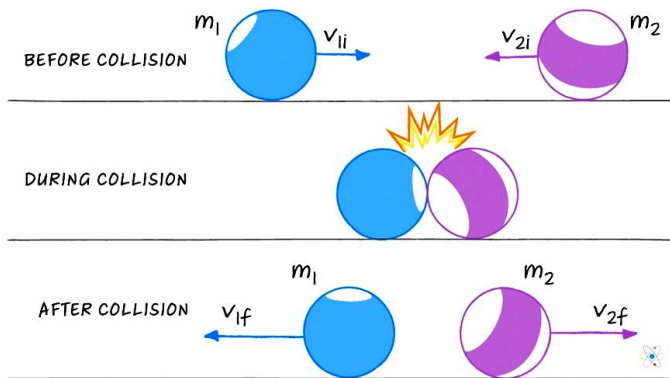
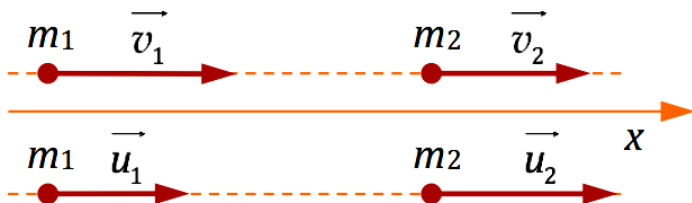


Абсолютно упругий удар – удар, при котором соударяющиеся тела испытывают упругую деформацию.

При абсолютно упругом ударе сохраняется и импульс, и механическая энергия системы соударяющихся тел.

Рассмотрим *абсолютно упругое центральное соударение* двух шаров

Абсолютно упругий удар



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$\frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2}$$

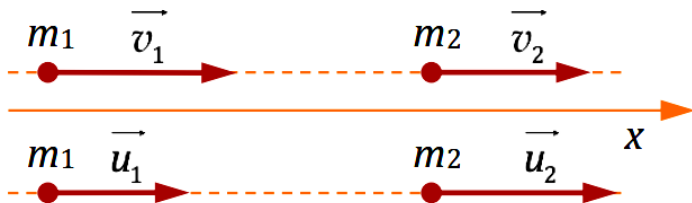
$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{u}_1 = m_2 \vec{u}_2 - m_2 \vec{v}_2 \\ m_1 \vec{v}_1^2 - m_1 \vec{u}_1^2 = m_2 \vec{u}_2^2 - m_2 \vec{v}_2^2 \end{cases}$$

$$\frac{\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2}{\vec{v}_1 - \vec{u}_1} = \frac{\vec{v}_2^2 - \vec{u}_2^2}{\vec{v}_2 - \vec{u}_2} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{u}_2$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1 - \vec{v}_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{v}_1 + m_2 \vec{u}_1 - m_2 \vec{v}_2$$

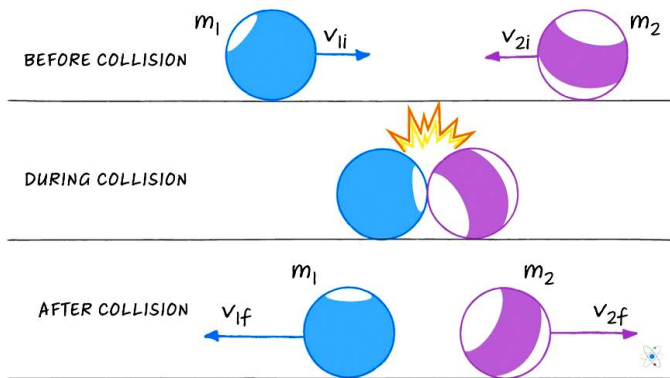
Абсолютно упругий удар



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{v}_1 + m_2 \vec{u}_1 - m_2 \vec{v}_2$$

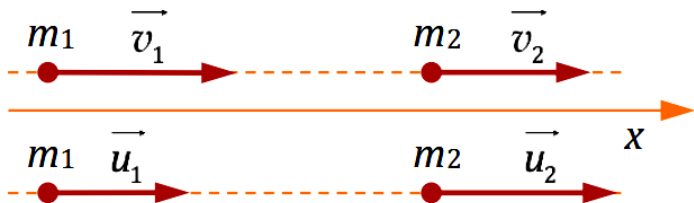
$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1 - \vec{v}_2$$



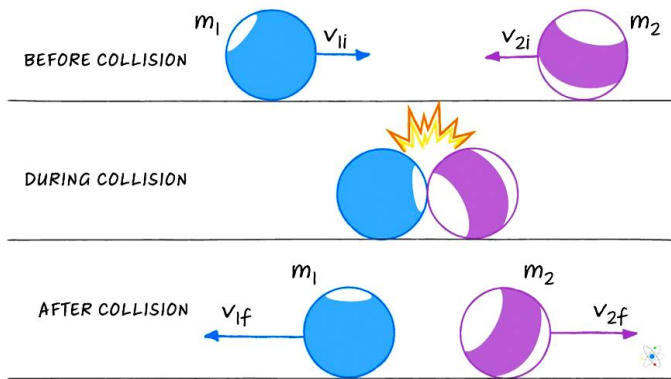
$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \frac{(m_1 + m_2)\vec{v}_1 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2 - (m_1 + m_2)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Абсолютно упругий удар



$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

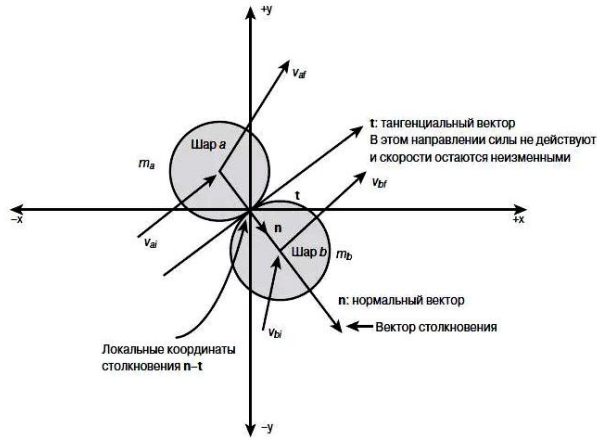
$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$



$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{v}_2, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_1$$

$$m_2 \gg m_1, \vec{v}_2 = \vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{-m_2\vec{v}_1}{m_2} = -\vec{v}_1$$

Абсолютно упругий удар



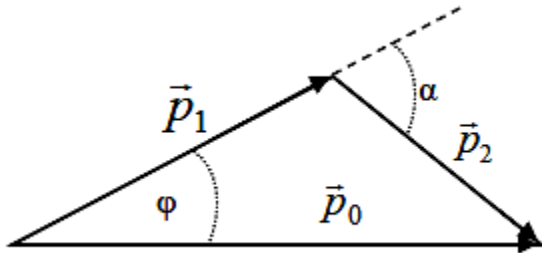
На покоящийся шар налетает шар такой же массы. Найдите угол разлета шаров после упругого нецентрального удара

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha$$

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \Rightarrow p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 \Rightarrow$$

$$2p_1p_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$



Интересует лишь относительное движение частиц внутри системы

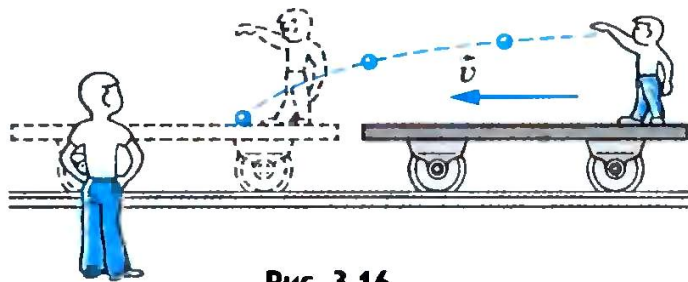
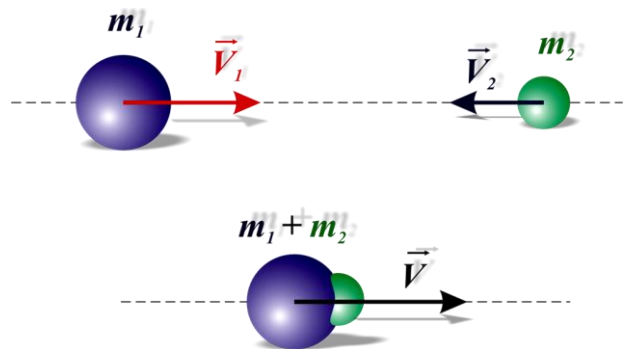


Рис. 3.16

Систему отсчета, жестко связанную с центром масс и перемещающуюся *поступательно* по отношению к инерциальным системам, называют *системой центра масс* или, кратко, *Ц-системой*

полный импульс системы частиц в Ц-системе всегда равен нулю

любая система частиц как целое покоится в своей Ц-системе



Система из двух частиц. Пусть массы частиц равны m_1 и m_2 , а их скорости в исходной K -системе отсчета – $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно

импульсы этих частиц в C -системе

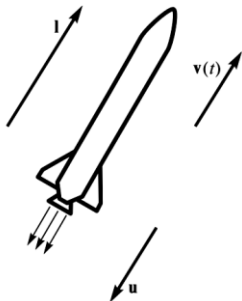
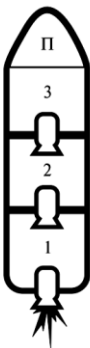
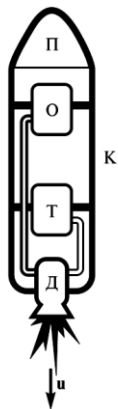
$$\tilde{p}_1 = m_1 \tilde{v}_1 = m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_C) \quad \tilde{p}_2 = m_2 \tilde{v}_2 = m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_C)$$

$\vec{v}_C$ – скорость C -системы относительно K -системы отсчета

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \quad \tilde{p}_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Реактивное движение



$$dm = dm^+ + dm^- \quad \mu^+ = \frac{dm^+}{dt} \quad \mu^- = -\frac{dm^-}{dt}$$

$$\vec{F}dt = (m + dm^+ + dm^-)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm^+(\vec{v} + \vec{u}^+) - dm^-(\vec{v} + \vec{u}^-) - m\vec{v} \approx m d\vec{v} - dm^+\vec{u}^+ - dm^-\vec{u}^-$$

$$m d\vec{v} = \vec{F}dt + dm^+\vec{u}^+ + dm^-\vec{u}^-$$

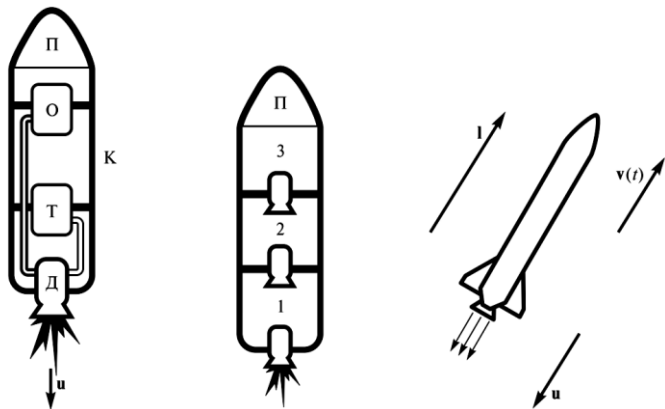
Уравнение движения тела с переменной массой
(уравнение Мещерского)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \mu^+\vec{u}^+ - \mu^-\vec{u}^-$$

Реактивное движение



Формула Циолковского



$$\left(\vec{F} = \vec{0}, dm^+ = 0, dm^- = dm, \mu^- = \mu = -\frac{dm}{dt}, \quad \vec{u}^- = \vec{u} \right)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u} \Rightarrow \frac{dm}{m} = \frac{d\vec{v}}{\vec{u}}$$

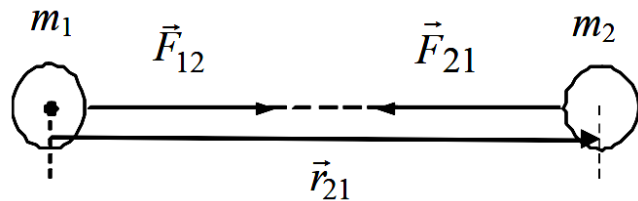
$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \frac{d\vec{v}}{\vec{u}}$$

Формула Циолковского

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} \ln \frac{m}{m_0} = \vec{v}_0 - \vec{u} \ln \frac{m_0}{m}$$

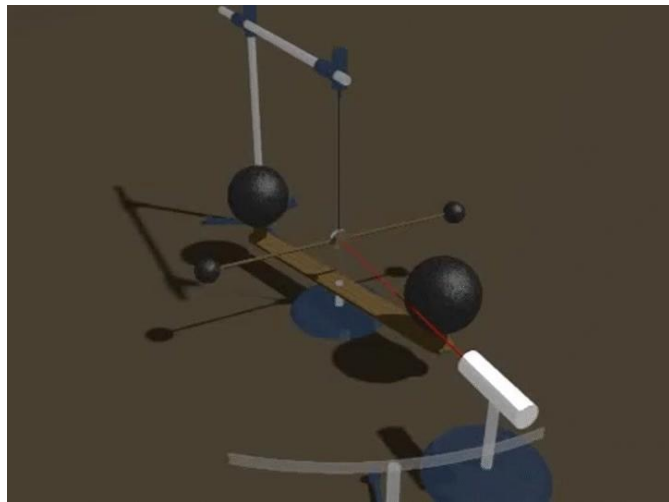
$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m}$$

Гравитация



$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Закон всемирного тяготения установлен для тел, принимаемых за материальные точки



В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу

Кавендиш

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Гравитационное поле. Напряженность

Теорема Гаусса для гравитационного поля:

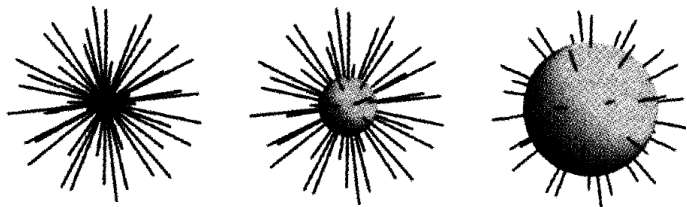
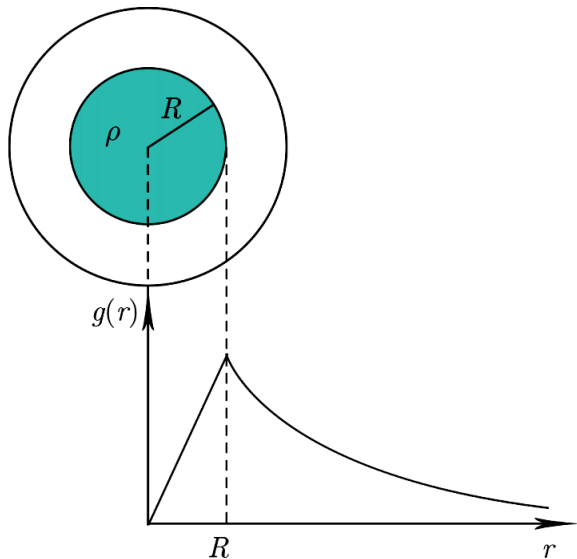
Поток вектора напряжённости через произвольную замкнутую поверхность равен сумме масс, расположенных внутри этой поверхности, умноженной на $4\pi G$

$$\Phi = \oint_S \vec{g} d\vec{S} = 4\pi G \Sigma m_{\text{внутр}} = 4\pi G \int_V \rho dV$$

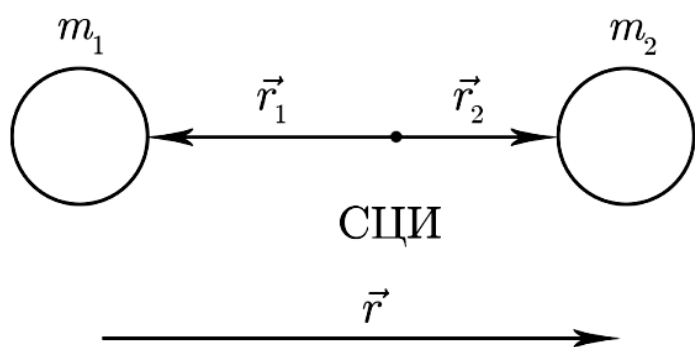
напряженность поля вне этого шара ($r > R$)

$$g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \Rightarrow g(r) = G \frac{M}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}_0 \frac{R^2}{r^2}$$



Задача двух тел в ЦСП



СЦИ

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Пусть $m_1 = M \gg m_2 = m$

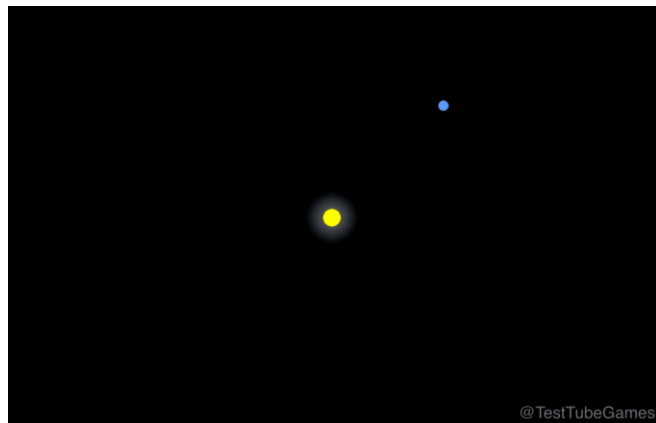
$$\vec{r}_1 = -\frac{m}{M + m} \vec{r} \approx \vec{0}, \quad \vec{r}_2 = \frac{M}{M + m} \vec{r} \approx \vec{r}$$

центр масс системы лежит в центре звезды, а сама звезда практически неподвижна

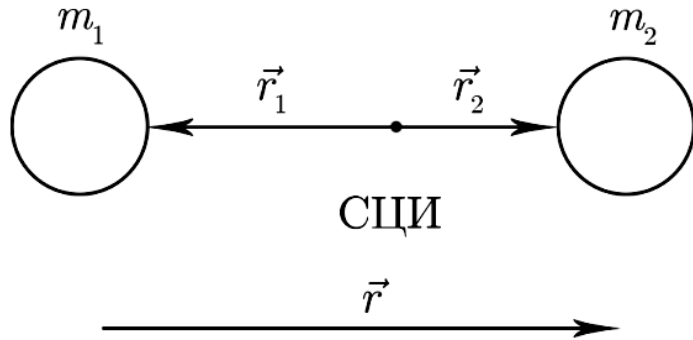
гравитационное взаимодействие этих тел

$$E_p = -GmM \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{GmM}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

Потенциал гравитационного поля $\phi = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}$



Задача двух тел в ЦСП



диссипации энергии в этой задаче нет

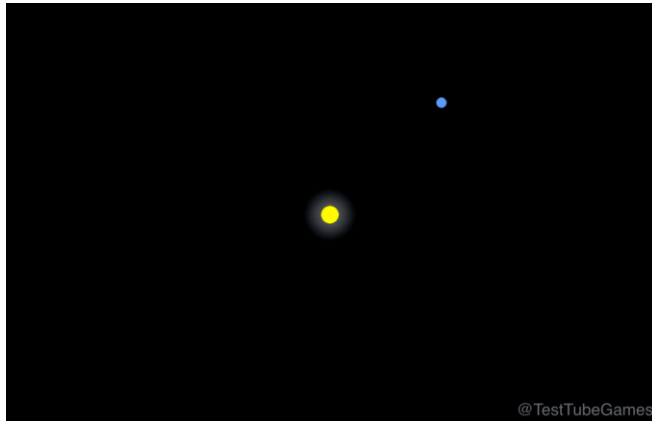
$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = \text{const}$$

Моменты сил взаимодействия в центрально-симметричном поле равны нулю

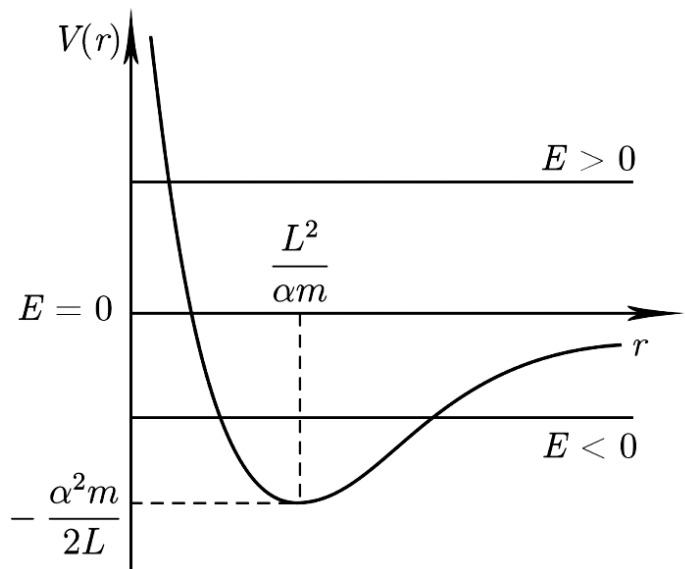
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Момент импульса планеты относительно звезды постоянен.

Траектория движения тела массы m становится плоской, т. е. лежит в одной плоскости



Задача двух тел в ЦСП

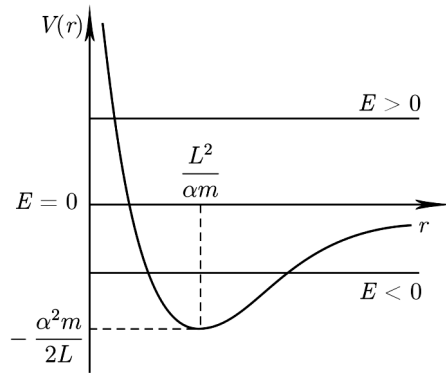


$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)$$
$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} - \text{приведенный потенциал}$$

$$\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)' = 0$$

$$r_{\text{экстр}} = \frac{L^2}{\alpha m} \quad v_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2L}$$

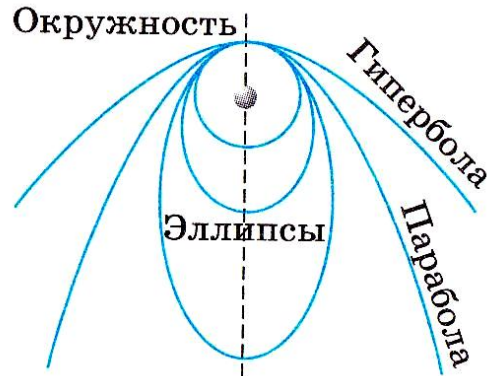
Задача двух тел в ЦСП



$E > 0$ – траектория движения представляет собой гиперболу. Движение инфинитное.

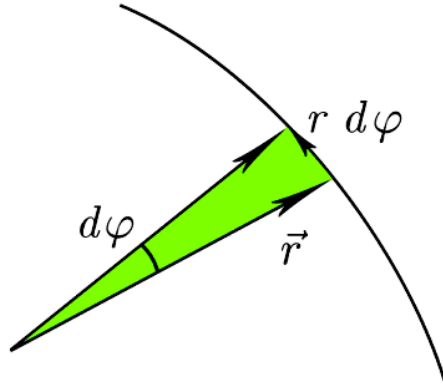
$E = 0$ – траектория движения представляет собой параболу. Движение инфинитное

$E < 0$ – траектория движения представляет собой эллипс. Движение финитное.



Первый закон Кеплера говорит о том, что тело движется вокруг притягивающего центра по эллиптической траектории

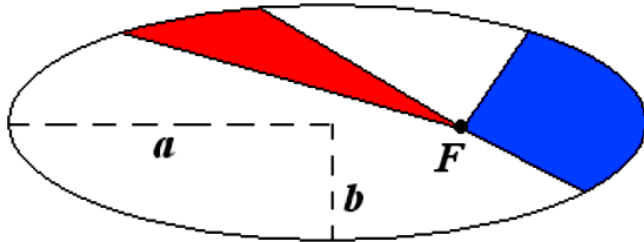
Задача двух тел в ЦСП



$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\varphi} = \frac{r^2}{2} \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m} = \text{const}$$

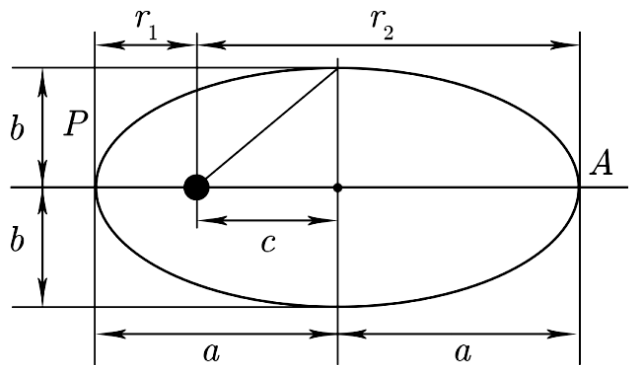


Второй закон. Радиус-вектор планет, определяющий её положение относительно Солнца, за равные промежутки времени описывает одинаковые площади

Задача двух тел в ЦСП

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)$$

В апогелии и перигелии $\dot{r} = 0$



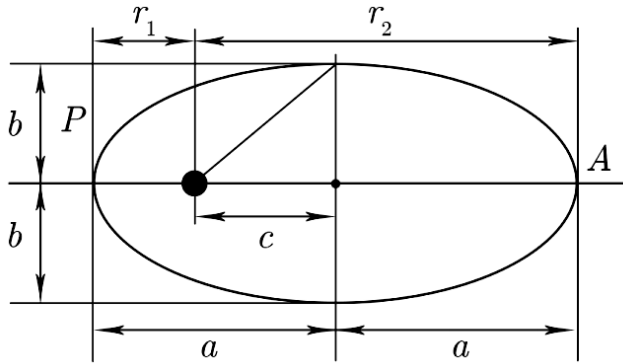
$$mr^2E = L^2 - 2\alpha mr \rightarrow r^2 + \frac{\alpha}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

$$r_1 + r_2 = 2a = -\frac{\alpha}{E} \Rightarrow a = -\frac{GmM}{2E}$$

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad c = \frac{r_2 - r_1}{2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{-\frac{L^2}{2mE}} = \sqrt{\frac{L^2}{Gm^2 M}} a$$

Задача двух тел в ЦСП



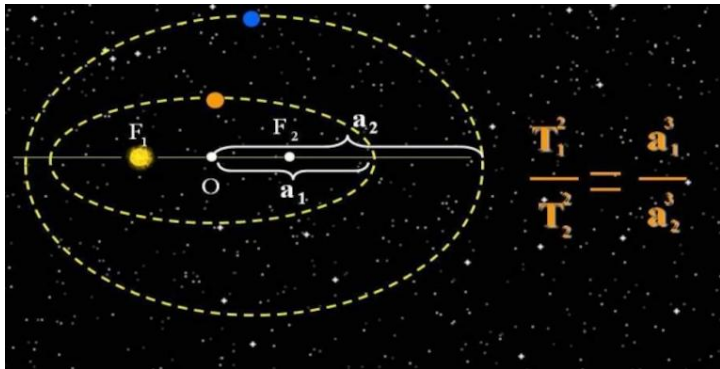
$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \rightarrow 2m \int_0^{S_{ell}} dS = L \int_0^T dt$$

$$2mS_{ell} = 2\pi tab = LT \Rightarrow T = \frac{2\pi tab}{L}$$

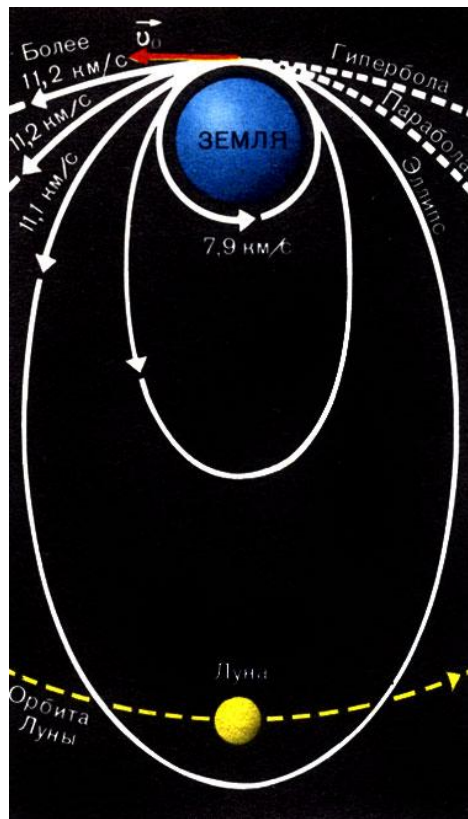
$$T = \frac{2\pi ta}{L} \sqrt{\frac{L^2}{Gm^2M}} a = 2\pi \sqrt{\frac{1}{GM}} a^{3/2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Третий закон. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит



Космические скорости



Круговая орбита

$$\frac{mv_0^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{R}} \quad v_I = \sqrt{g_0 R_3}$$

Первая космическая скорость – это скорость спутника, летающего на орбите, высота которой $H \ll R_3$

Вторая космическая скорость – это скорость, которую нужно придать спутнику, чтобы он вышел из поля притяжения Земли, т. е такая, чтобы энергия стала равной нулю

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_0 R_3} = \sqrt{2}v_I$$



**Спасибо
за внимание!**

ITMO *re than a*
UNIVERSITY

nnkhvastunov@itmo.ru