

ІТМО

Лекция 4

Работа и энергия

Кинетическая энергия



Кинетическая энергия — энергетическая характеристика движения

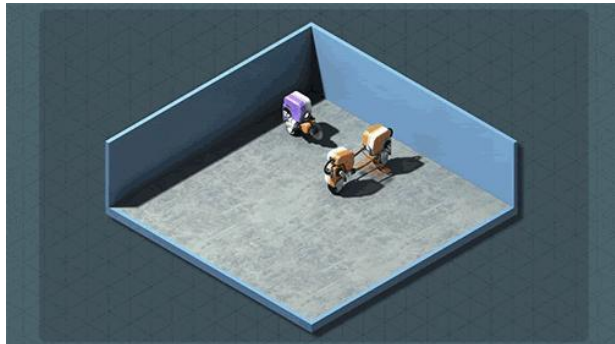
$$[W_k] = \text{Дж (джоуль)}$$

Кинетическая энергия материальной точки равна произведению массы материальной точки на квадрат её скорости, делённый пополам

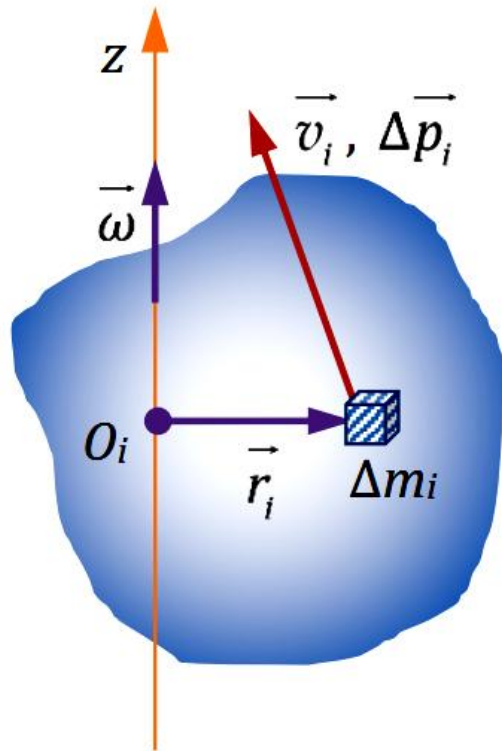
$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий тел (материальных точек), составляющих эту систему

$$W_k = \sum W_{ki}$$



Кинетическая энергия

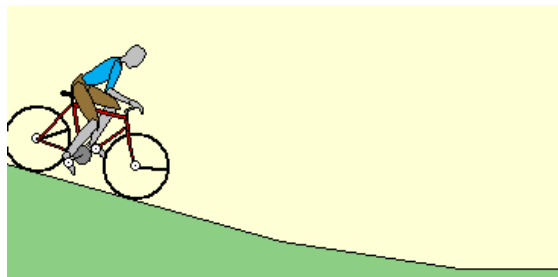


Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента инерции тела на квадрат его угловой скорости, делённый пополам

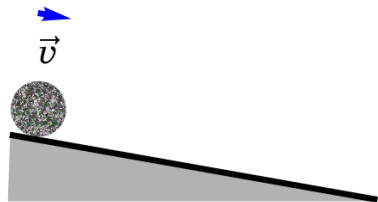
$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$W_k = \sum \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия

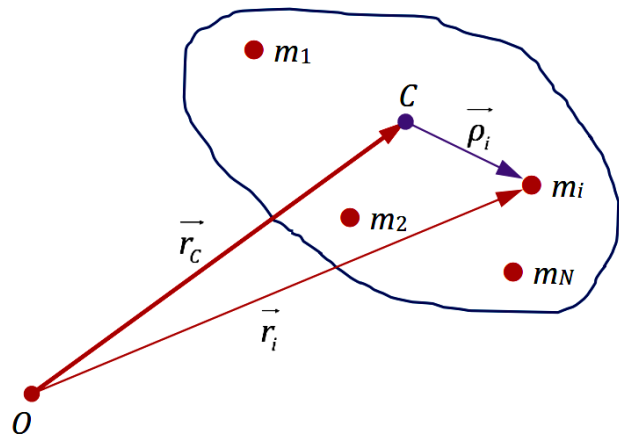


Теорема Кёнига: кинетическая энергия твёрдого тела, совершающего плоское движение, равна сумме кинетической энергии поступательного движения этого тела со скоростью, равной скорости центра масс тела, и вращения тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения



$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия



$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$$

$$\begin{aligned} W_k &= \sum \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i (\vec{v}_C + \vec{u}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum \Delta m_i v_C^2 + \frac{1}{2} \sum \Delta m_i u_i^2 + \vec{v}_C \sum \Delta m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \\ &= \frac{mv_C^2}{2} + \frac{\omega_C^2}{2} \sum \Delta m_i \rho_i^2 + \vec{v}_C \frac{d}{dt} \sum \Delta m_i \vec{\rho}_i \\ &\quad \quad \quad = 0 \\ &= \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega_C^2}{2} \end{aligned}$$

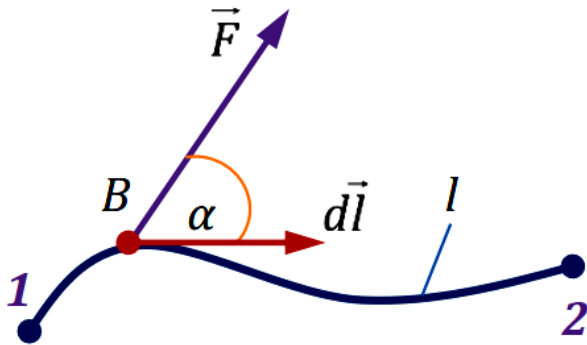
Работа – скалярная физическая величина – энергетическая характеристика взаимодействия

$$[A] = \text{Дж (джоуль)}$$

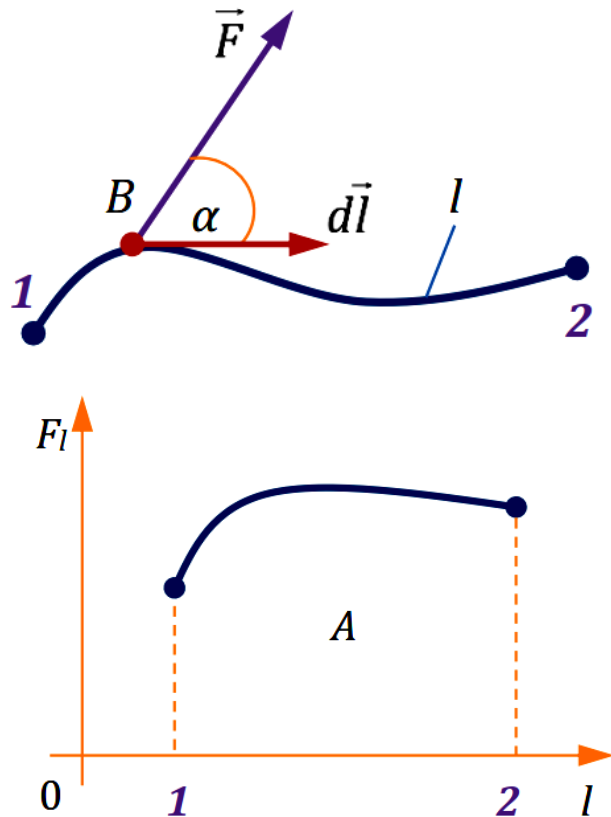
Элементарная работа равна скалярному произведению силы на элементарное (бесконечно малое) перемещение точки приложения этой силы

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = F_l dl$$

Вектор элементарного перемещения всегда направлен по касательной к траектории; F_l – проекция вектора силы на это направление



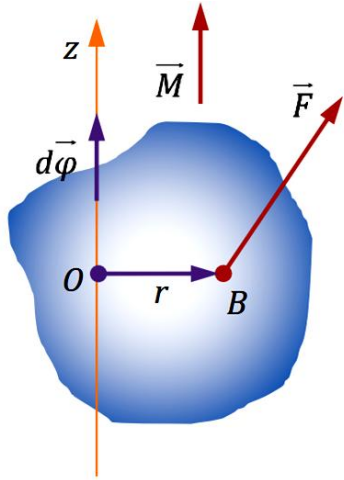
Работа и мощность



Работа равна сумме (интегралу) элементарных работ по траектории точки приложения силы

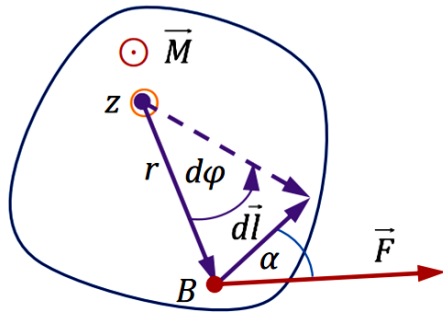
$$A = \int_l dA = \int_l \vec{F} d\vec{l} = \int_l F_l dl$$

Графический смысл работы: площадь под кривой $F_l(l)$ равна модулю работы силы $\vec{F}$ при перемещении точки приложения этой силы по траектории l

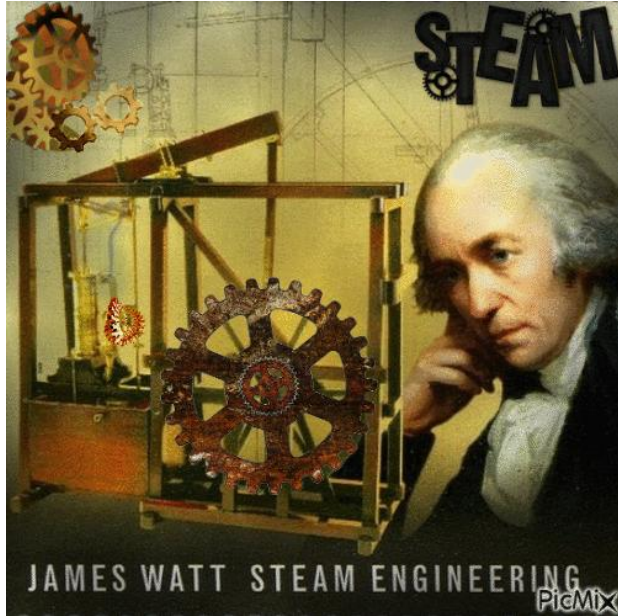


Работа при вращательном движении твёрдого тела
(вокруг оси)

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = \vec{F}[\vec{r}, d\vec{\varphi}] = \vec{M} d\vec{\varphi} = M_z d\varphi$$



Работа и мощность



Мощность – энергетическая характеристика взаимодействия (или тела, совершающего работу), равная скорости совершения работы

$$[N] = \text{Вт (ватт)}$$

Средняя мощность равна отношению работы к промежутку времени, за который эта работа совершена

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Мгновенная мощность равна мгновенной скорости совершения работы – производной работы по времени

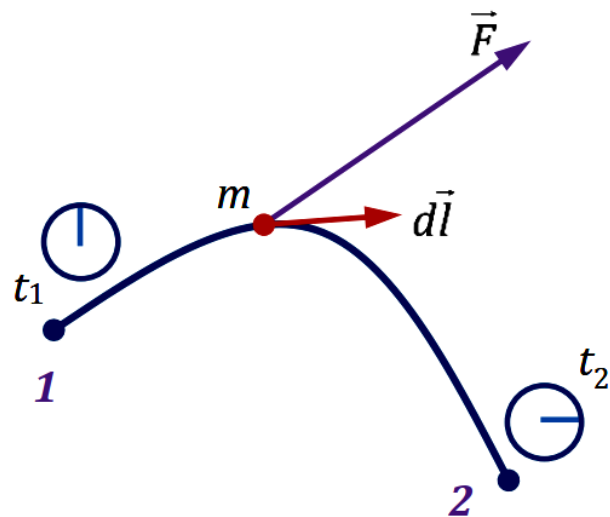
$$N = \frac{dA}{dt}$$

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \vec{v}$$



Теорема об изменении кинетической энергии

Изменение кинетической энергии механической системы равно сумме работ внешних и внутренних сил



$$\Delta W_k = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}}$$

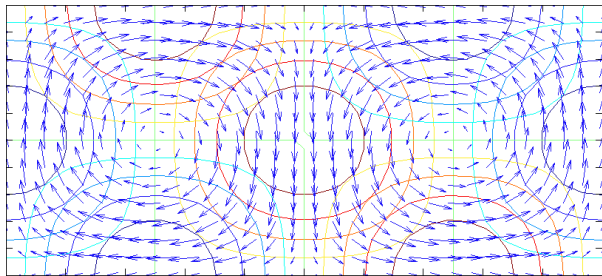
$$dA = \vec{F} d\vec{l} = \vec{F} \vec{v} dt$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a} \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \vec{v} d\vec{v} \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k \end{aligned}$$

Для механической системы

$$A = \sum A_i = \sum W_{k2i} - \sum W_{k1i} = W_{k2} - W_{k1}$$

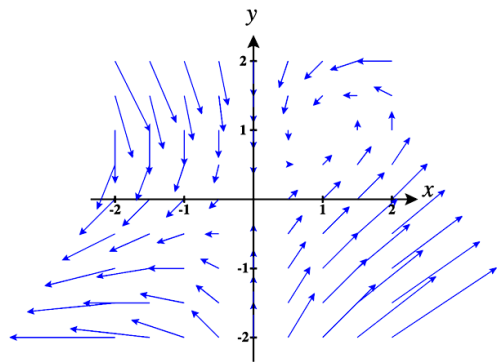
Потенциальная энергия материальной точки



Поле (в математике) – величина как функция радиуса-вектора (или координат).

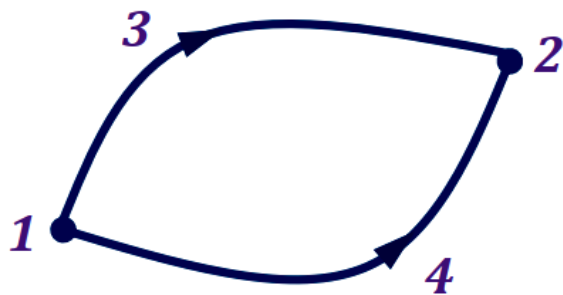
Задать силу как функцию радиуса-вектора материальной точки, воздействие на которую описывается этой силой, значит задать силовое поле

$$\vec{F} = f(\vec{r})$$



Поле в физике – физический объект

Потенциальная энергия материальной точки



Поле **потенциально** (сила потенциальна), если работа поля при перемещении материальной точки по любой замкнутой траектории равна нулю (иначе говоря, циркуляция силы по произвольному замкнутому контуру равна нулю)

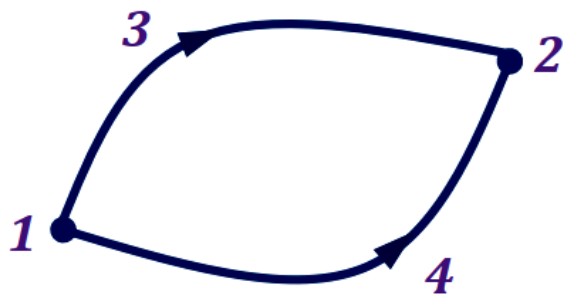
$$A_{1 \rightarrow 1} = 0 \quad \oint_l \vec{F} d\vec{l} = 0$$

работа поля по перемещению материальной точки не зависит от формы её траектории, а зависит только от начального и конечного положения точки

$$A_{13241} = 0 = A_{132} + A_{241} = A_{132} - A_{142}$$

$$\Rightarrow A_{132} = A_{142}$$

Потенциальная энергия материальной точки

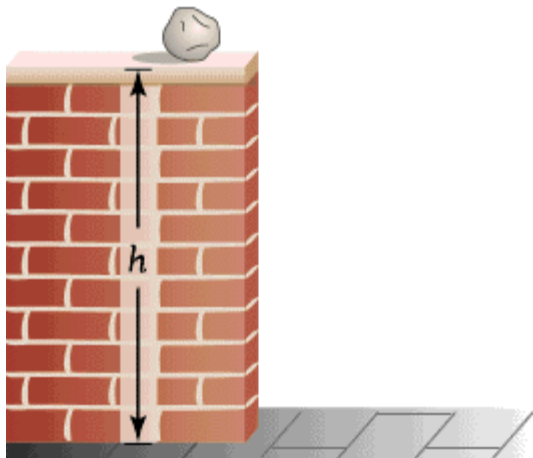


Изменением потенциальной энергии материальной точки при перемещении точки из положения **1** в положение **2** называется работа потенциального поля, совершаемая при этом перемещении, взятая с обратным знаком

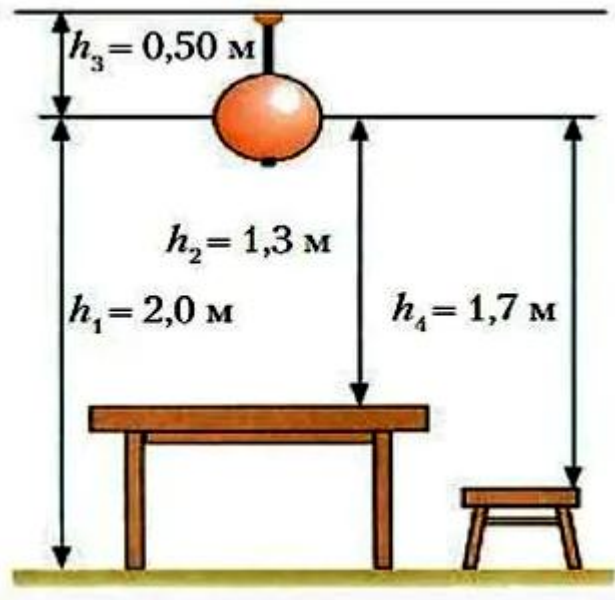
$$\Delta W_{p12} = -A_{12}^p$$

Потенциальная энергия материальной точки – работа потенциального поля по перемещению материальной точки в данное положение из точки, где потенциальная энергия принята равной нулю, взятая с обратным знаком

$$W_p = -A^p = - \int_{W_p=0}^1 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^{W_p=0} \vec{F} d\vec{l}$$



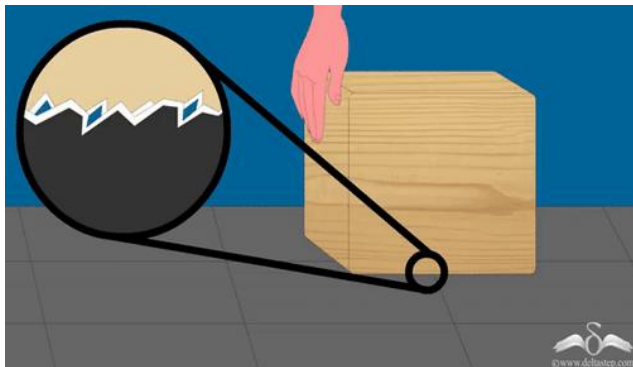
Потенциальная энергия материальной точки



Физический смысл имеет изменение потенциальной энергии. Сама же по себе потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной.

При ответе на вопрос, чему равна потенциальная энергия, нужно обязательно указывать, где выбрано начало её отсчёта (*нулевой уровень*)

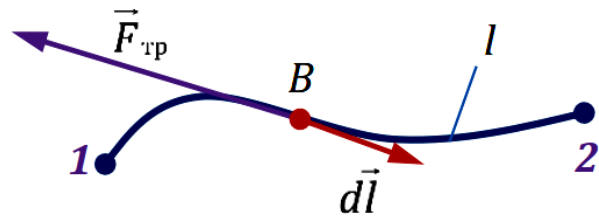
Примеры расчета работы



Работа силы сухого трения

$$dA = \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{l} = F_{\text{тр}} dl \cos \pi = -F_{\text{тр}} dl$$

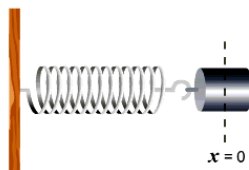
$$A = - \int_l F_{\text{тр}} dl = -F_{\text{тр}} l$$



Работа силы трения зависит от длины траектории, соединяющей начальную и конечную точки, следовательно, сила трения не является потенциальной

Примеры расчета работы

Работа силы упругости



$$x = 0$$

$$F_{\text{уп}} = 0$$

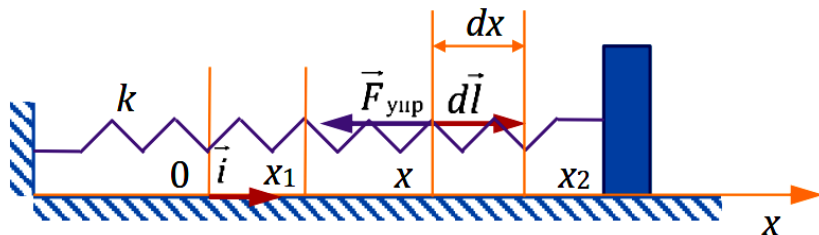
$$v = 0$$

$$a = 0$$

$$dA = \vec{F}_{\text{уп}} d\vec{l} = -kx\vec{i} \cdot d\vec{x} = -kxdx$$

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} kxdx = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right)$$

Работа не зависит от того, каким образом пружина переходит от деформации x_1 к деформации x_2 , значит, сила упругости потенциальна

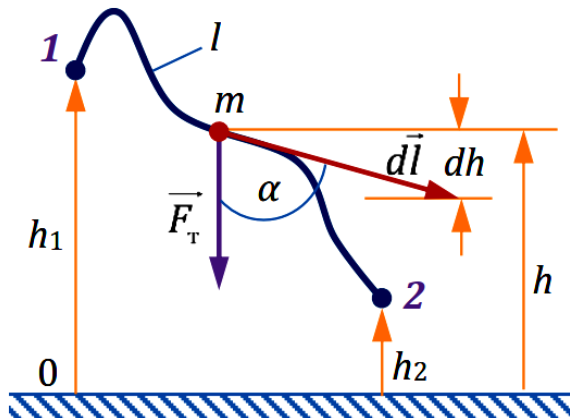


$$\Delta W_{p12} = -A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}$$

$$W_{p0}(x=0) = 0 \Rightarrow W_p = \frac{kx^2}{2}$$

Примеры расчета работы

Работа силы тяжести



$$dA = \vec{F}_T d\vec{l} = F_T dl \cos \alpha = -mg dh$$

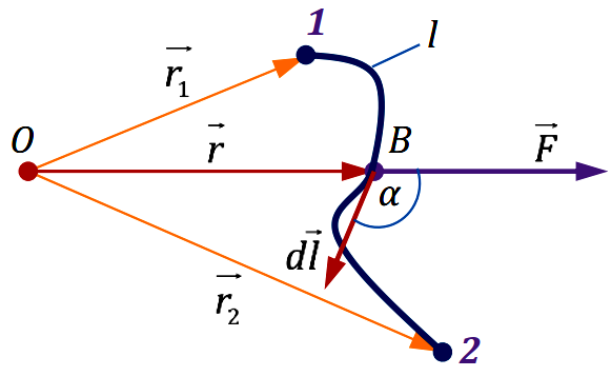
$$A = - \int_{h_1}^{h_2} mg dh = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\Delta W_{p12} = mg(h_1 - h_2)$$

Положим начало отсчёта потенциальной энергии на нулевом уровне: $W_p = 0$ при $h = 0$, тогда потенциальная энергия тела массы m в однородном гравитационном поле (поле тяжести)

$$W_p = mgh$$

Центральная сила – сила, модуль которой зависит только от расстояния от точки, называемой **силовым центром (центром силы)**, направленная вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр силы с точкой приложения силы



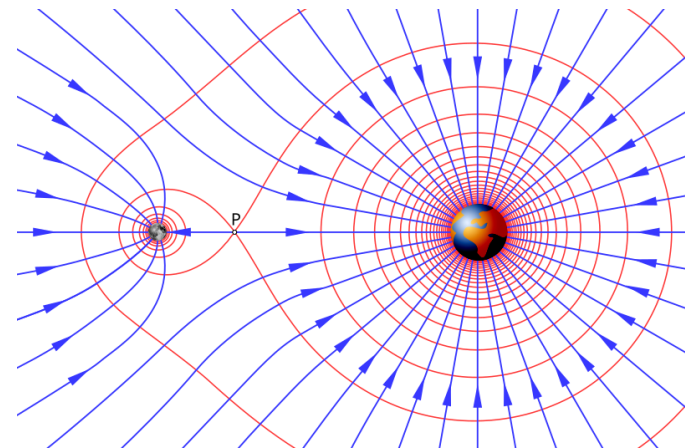
$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F dl \cos \alpha = \int_1^2 F_r dr$$

Центральное поле потенциально

$$W_p = \int_r^{W_p=0} F_r(r) dr$$

Примеры расчета работы

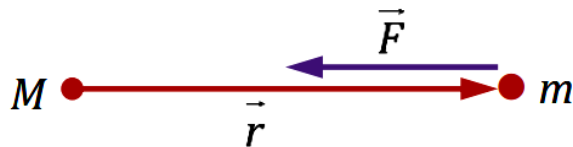


Гравитационное поле

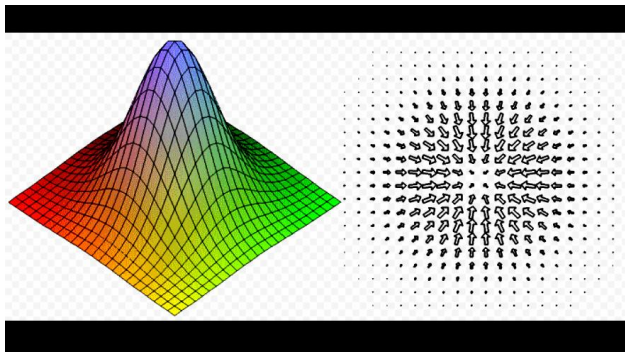
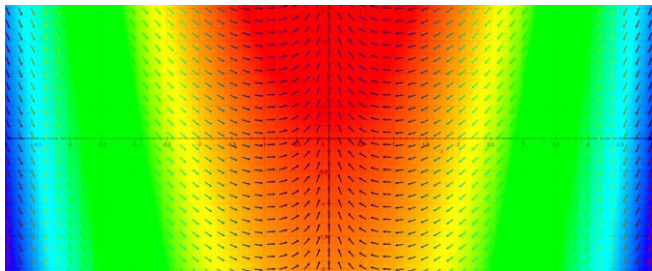
$$F_r(r) = -G \frac{mM}{r^2}$$

$$W_p(\infty) = 0$$

$$W_p = - \int_{\infty}^r F_r dr = \int_{\infty}^r G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r}$$



Связь силы и потенциальной энергии. Градиент



$$dW_p = -dA = -\vec{F} d\vec{l}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

$$dW_p = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}$$

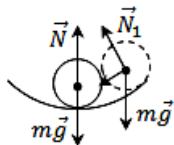
$$\vec{F} = -\frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k} = -\nabla W_p = -\text{grad } W_p$$

∇ – оператор «**набла**» – оператор векторного дифференцирования, в декартовых координатах

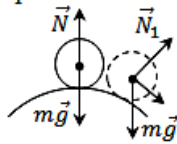
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Связь силы и потенциальной энергии. Градиент

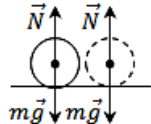
Устойчивое
равновесие



Неустойчивое
равновесие



Безразличное
равновесие



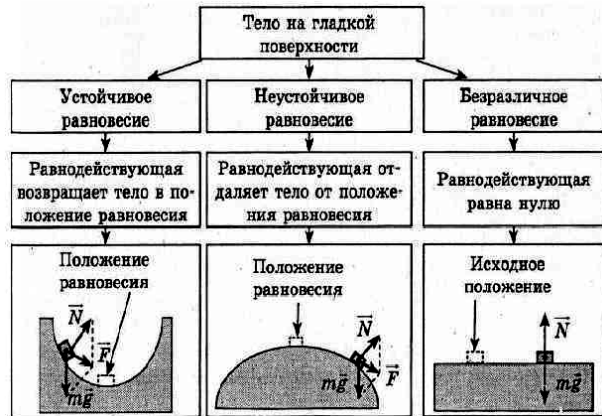
Градиент – произведение вектора ∇ на скалярную функцию – векторная функция скалярного аргумента; в декартовых координатах

Направление градиента совпадает с направлением наиболее быстрого возрастания скалярной функции

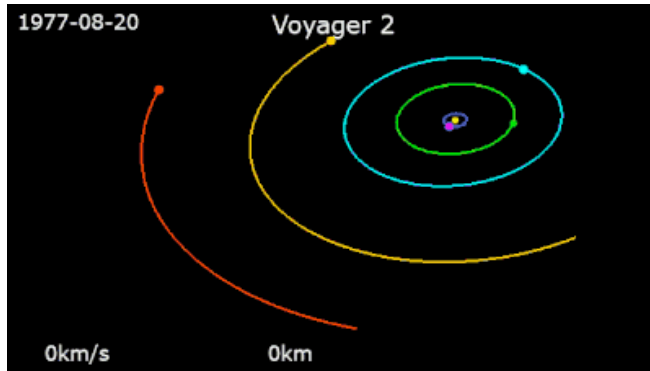
Материальная точка ускорится в направлении, противоположном градиенту потенциальной энергии

В точках, где $\text{grad}W_p = 0$ материальная точка находится в положении равновесия.

Устойчивое равновесие имеет место в точках, соответствующих минимуму потенциальной энергии



Потенциальная энергия системы



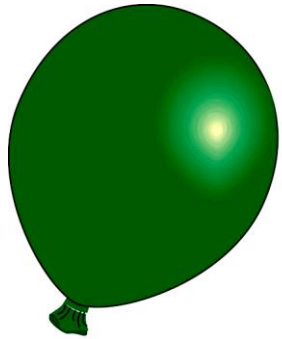
Потенциальная энергия механической системы равна работе внешних и внутренних потенциальных сил при переходе системы из данной конфигурации в конфигурацию, где потенциальная энергия системы принята равной нулю (конфигурация системы – это совокупность координат тел (материальных точек), входящих в эту систему)

$$W_p = A_{\rightarrow (W_p=0)} = -A_{(W_p=0) \rightarrow}$$

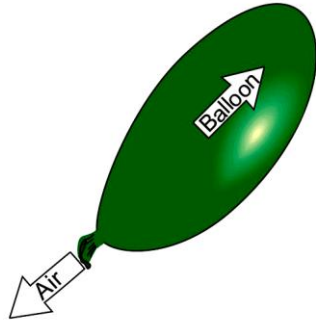
$$W_p = A_{r \rightarrow \infty} = \int_r^\infty F_r(r) dr = - \int_r^\infty G \frac{mM}{r^2} dr = G \frac{mM}{r}$$



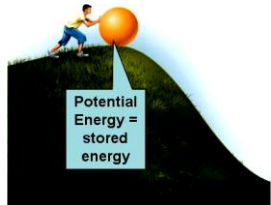
Закон сохранения энергии



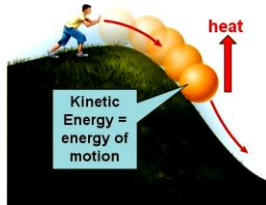
Potential Energy



Kinetic Energy



Potential
Energy =
stored
energy



Kinetic
Energy =
energy of
motion

$$\Delta W_k = A_p^{\text{внутр}} + A_p^{\text{внеш}} + A_{np}^{\text{внутр}} + A_{np}^{\text{внеш}}$$

$$\Delta W_k - A_p^{\text{внутр}} - A_p^{\text{внеш}} = \Delta W_k + \Delta W_p = A_{np}^{\text{внутр}} + A_{np}^{\text{внеш}}$$

$$\Delta W_k + \Delta W_p = \Delta(W_k + W_p) = \Delta W = A_{np}^{\text{внутр}} + A_{np}^{\text{внеш}}$$

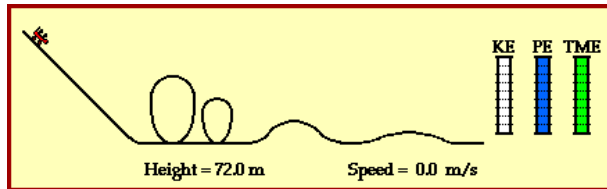
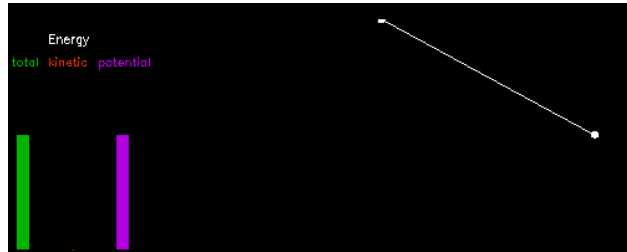
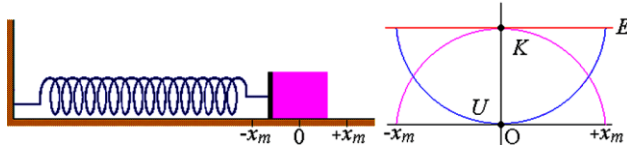
Механическая энергия системы – сумма кинетической и потенциальной энергии

$$W = W_k + W_p$$

Закон изменения механической энергии:
изменение механической энергии системы равно сумме работ внешних и внутренних непотенциальных сил

$$\Delta W = A_{np}^{\text{внутр}} + A_{np}^{\text{внеш}}$$

Закон сохранения энергии



Закон сохранения механической энергии:

механическая энергия системы не изменяется с течением времени, если сумма работ внешних и внутренних непотенциальных сил равна нулю, а все внешние потенциальные силы *стационарны* (т. е. не зависят явным образом от времени).

Консервативные силы – потенциальные силы и непотенциальные силы, работа которых равна нулю.

Диссипативные силы – непотенциальные силы, работа которых меньше нуля. При наличии взаимодействий, описываемых диссипативными силами, происходит **диссипация** энергии – переход энергии упорядоченных процессов (механической энергии) в энергию неупорядоченных процессов (внутреннюю энергию).



**Спасибо
за внимание!**

ITMO *re than a*
UNIVERSITY

nnkhvastunov@itmo.ru