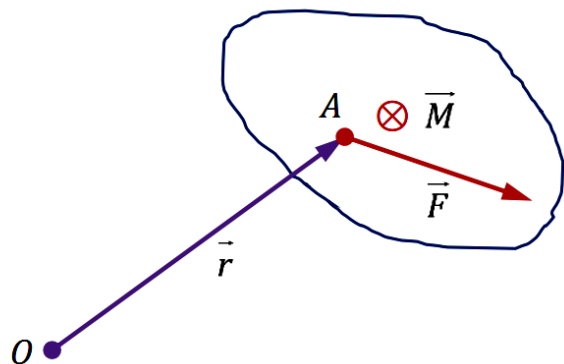


ІТМО

Лекция 3

Динамика ТТ

Момент силы

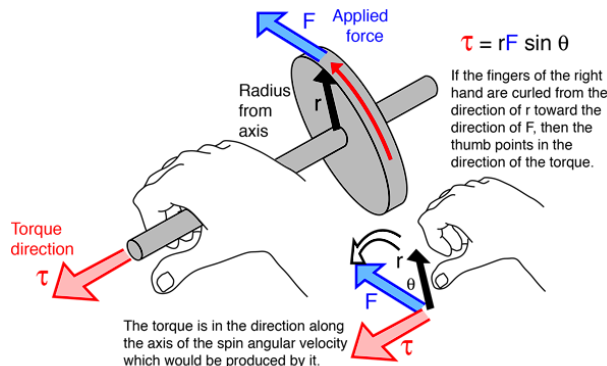


Момент силы — векторная (псевдовекторная) величина, характеризующая взаимодействие тел.

Момент силы относительно точки

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

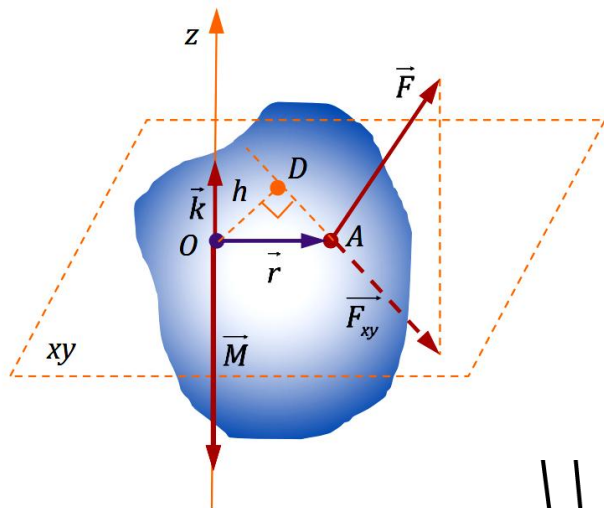
точка, относительно которой определяется момент, — **полюс**



$$M = Fr \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Момент силы



Момент силы относительно оси

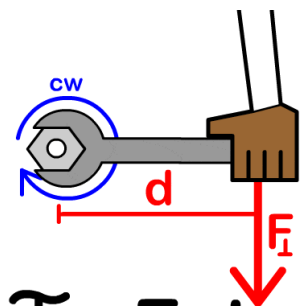
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]_z \vec{k}$$

$$M = r F_{xy} \sin(\vec{r}, \vec{F}_{xy})$$

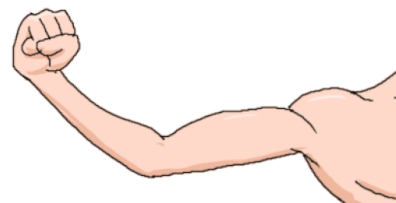
Плечо силы — скалярная величина — кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы

$$h = r \sin(\vec{r}, \vec{F}_{xy})$$

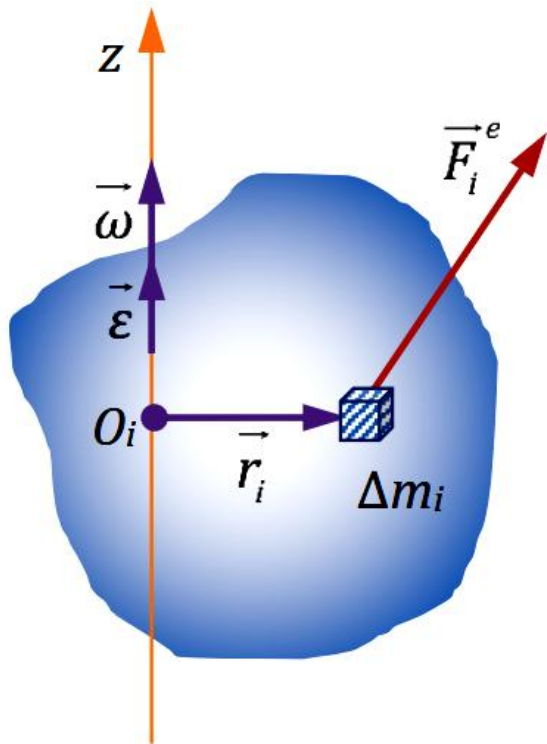
$$M = h F_{xy}$$



$$\mathcal{T} = F_{\perp} d$$



Основное уравнение динамики вращательного движения



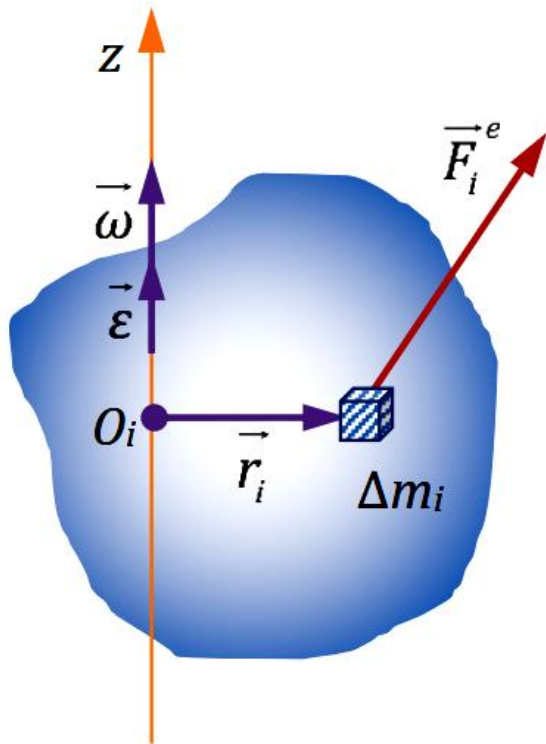
$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki}^{\text{внутр}}$$

$$\Delta m_i [\vec{r}_i \vec{a}_i] = [\vec{r}_i \vec{F}^{\text{внеш}}] + \sum_{k \neq i} [\vec{r}_i \vec{F}_{ki}^{\text{внутр}}]$$

$$[\vec{r}_i \vec{F}^{\text{внеш}}] = \vec{M}_i^{\text{внеш}}$$

$$\sum_{k \neq i} [\vec{r}_i \vec{F}_{ki}^{\text{внутр}}] = \sum_{k \neq i} \vec{M}_{ki}^{\text{внутр}}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения



$$\vec{\varepsilon} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \vec{M}$$

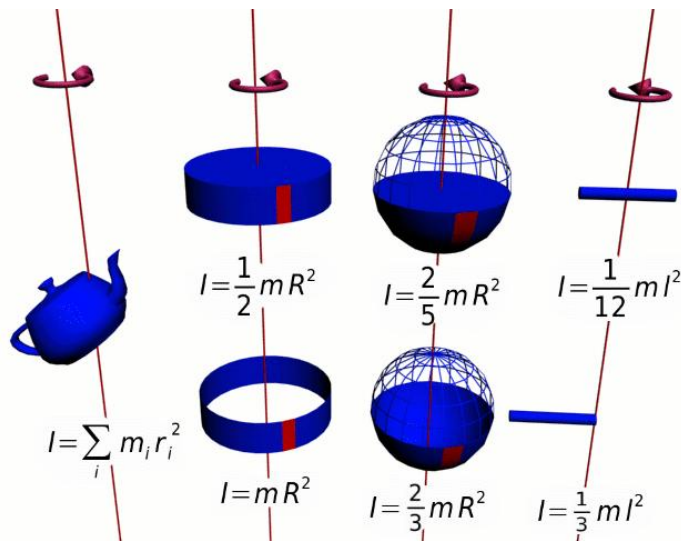
момент инерции тела относительно оси

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$\vec{M}$ – главный вектор моментов внешних сил

**Основное уравнение динамики
вращательного движения**

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$



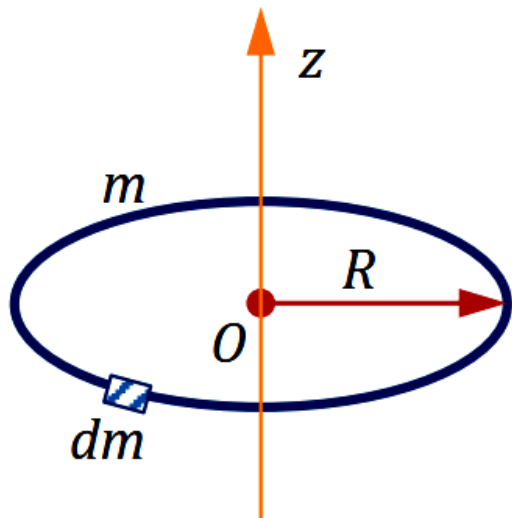
Момент инерции тела относительно оси

$$I = \sum_i \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \Delta m_i r_i^2 = \int_0^m r^2 dm \quad [I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Момент инерции – мера инертности тела во вращательном движении – скалярная физическая величина, зависящая от формы и размеров тела

Момент инерции тела относительно точки (полюса)

$$I = \int_0^m r^2 dm$$

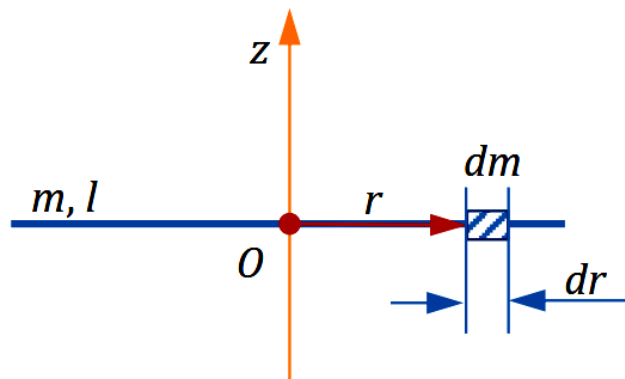


Тонкое кольцо (полый цилиндр)

$$dI = R^2 dm$$

$$I = \int_0^m R^2 dm = R^2 \int_0^m dm = mR^2$$

Момент инерции



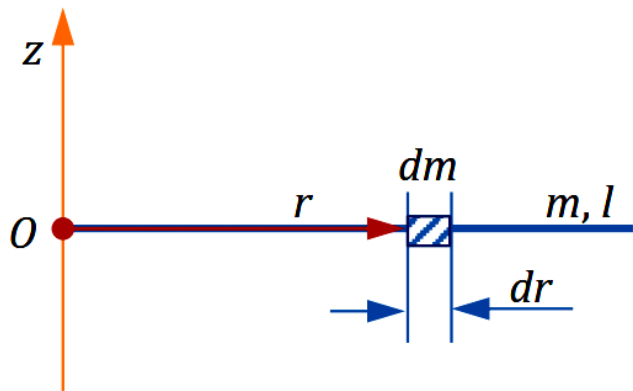
Тонкий стержень

$$dm = \tau dr = \frac{m}{l} dr \Rightarrow dI = \frac{m}{l} r^2 dr$$

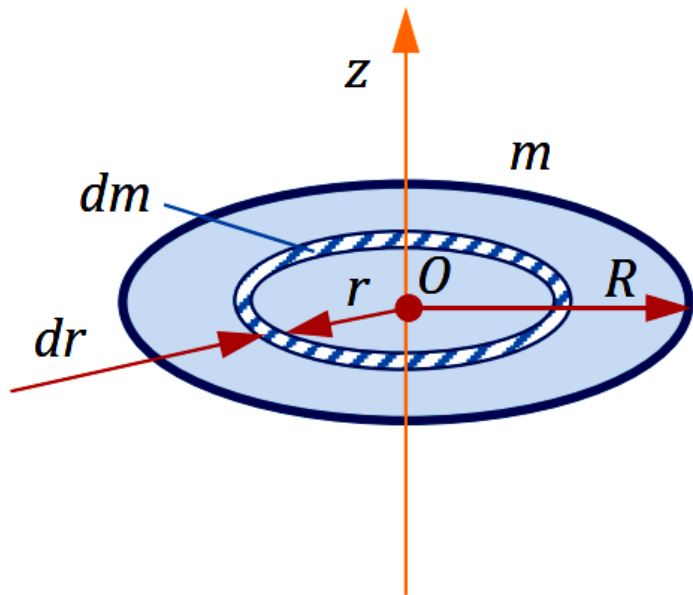
относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему

$$I = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = \frac{m}{3l} \left(\frac{l^3}{8} - \frac{(-l)^3}{8} \right) = \frac{ml^2}{12}$$

относительно оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно ему



$$I = \frac{m}{l} \int_0^l r^2 dr = \frac{m}{3l} (l^3 - 0) = \frac{ml^2}{3}$$

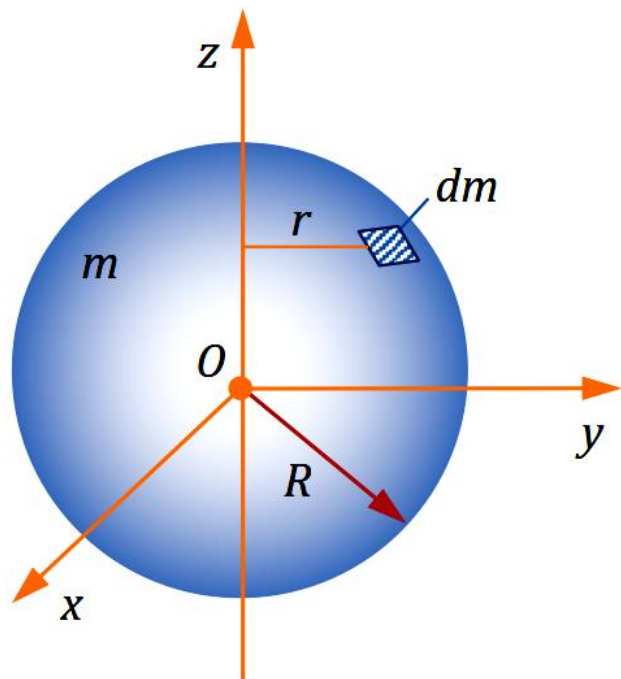


Однородный диск (сплошной цилиндр)

$$dm = \sigma dS, \quad \sigma = \frac{m}{\pi R^2}, \quad dS = 2\pi r dr$$

$$dI = r^2 dm = r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

$$I = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}$$



Однородная сфера

$$dI_x = dm(y^2 + z^2), dI_y = dm(x^2 + z^2),$$
$$dI_z = dm(x^2 + y^2), dI_0 = dm(x^2 + y^2 + z^2) = R^2 dm$$

$$I_0 = mR^2 = \frac{1}{2} \int_0^m [(y^2 + z^2) + (x^2 + z^2) + (x^2 + y^2)] dm$$
$$= \frac{3}{2} \int dI_z = \frac{3}{2} I_z$$

$$I_z = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} mR^2$$

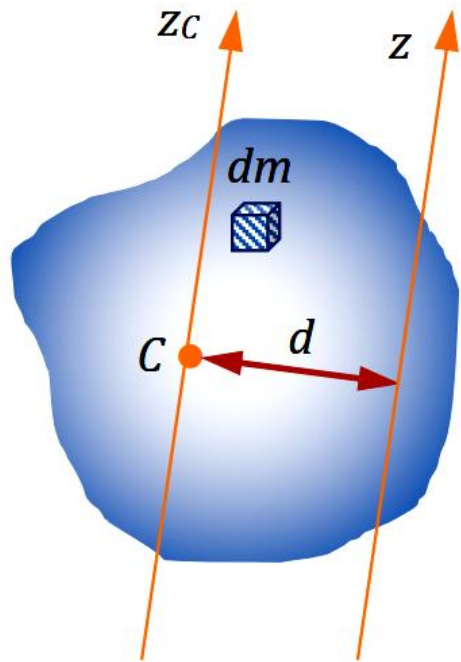


Однородный шар

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \frac{m}{V} dV = r^2 \frac{m}{V} 4\pi r^2 dr$$

$$I = \frac{4\pi m}{V} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi m}{5V} R^5 = \frac{1}{5} \frac{4\pi m R^5}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3}{5} m R^2$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера



Момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I = I_c + md^2$$

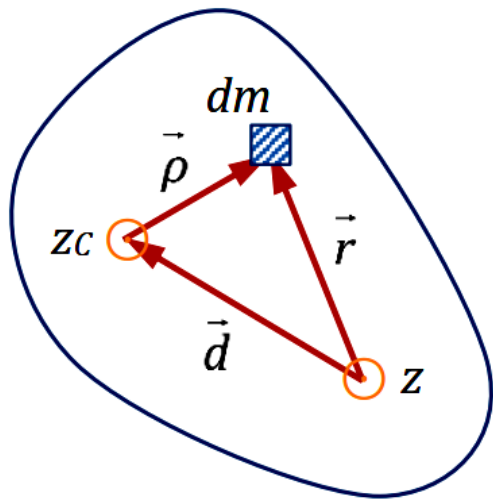
Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{d}$$

$$dI = r^2 dm$$

$$dI_C = \rho^2 dm$$

$$dI = (\vec{\rho} + \vec{d})^2 dm = \rho^2 dm + d^2 dm + 2\vec{\rho}\vec{d} dm$$

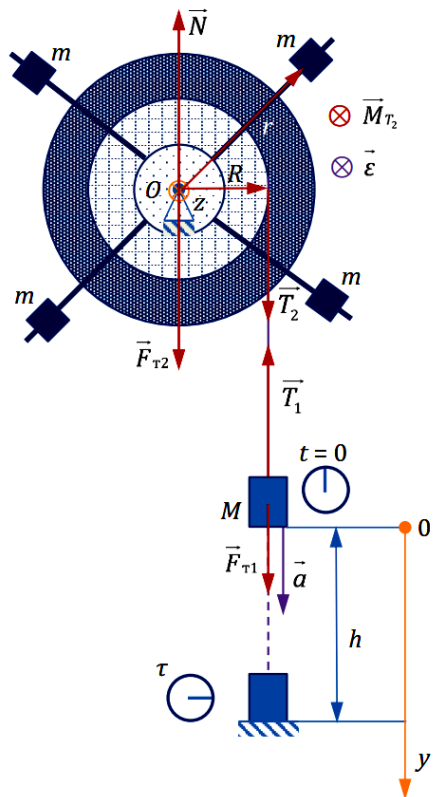


$$I = \int_0^{I_C} dI_C + d^2 \int_0^m dm + 2\vec{d} \int_0^m \vec{\rho} dm$$

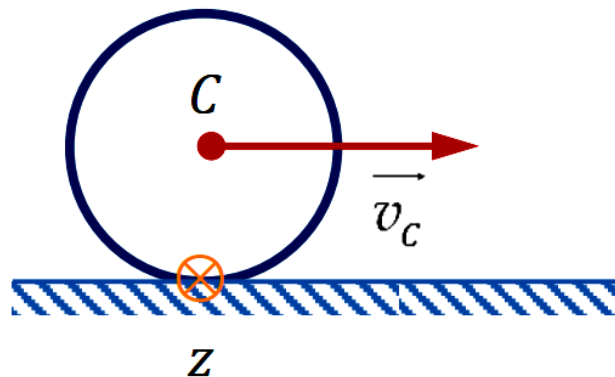
$$\int_0^m \vec{\rho} dm = \mathbf{0} \quad (C - \text{центр масс})$$

$$I = I_C + md^2$$

Пример задачи



На шкив радиуса R намотана нить, на конце которой прикреплён груз массы M . Масса грузов на спицах равна m , они расположены на расстоянии r от оси маятника; момент инерции маховика со спицами относительно оси маятника равен I_0 . Груз массы M поднимают на расстояние h над полом и отпускают. Через какое время груз коснётся пола?

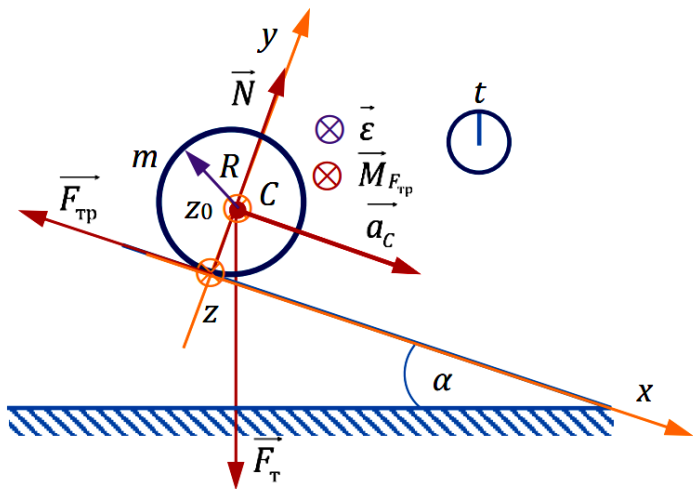


Качение без проскальзывания – плоское движение, при котором скорость точек тела, соприкасающихся с опорной поверхностью, относительно этой поверхности, равна нулю.

Ось, проходящая через эти точки, неподвижна и называется **мгновенной осью вращения** (**Ускорения точек мгновенной оси не равны нулю!**)

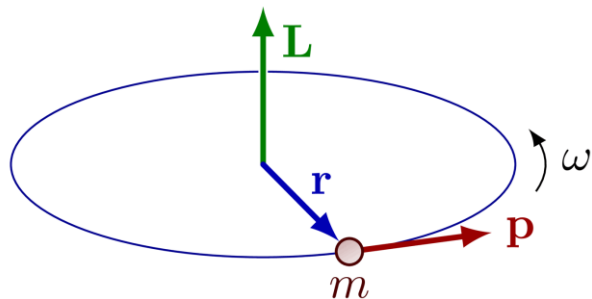
Качение без проскальзывания можно представить как вращение вокруг мгновенной оси. Качение без проскальзывания возможно благодаря трению. Оно характеризуется *силой трения покоя* (так как точки, соприкасающиеся с поверхностью, не движутся относительно неё)

Пример задачи



Цилиндр массы m и радиуса R , момент инерции которого относительно его оси равен I_C , скатывается без проскальзывания с плоскости, наклонённой к горизонту под углом α . Найти ускорение центра масс цилиндра

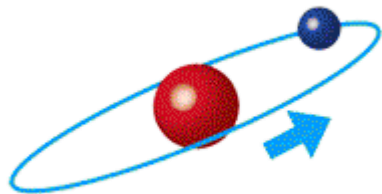
Момент импульса



$$\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

Момент импульса твёрдого тела относительно оси

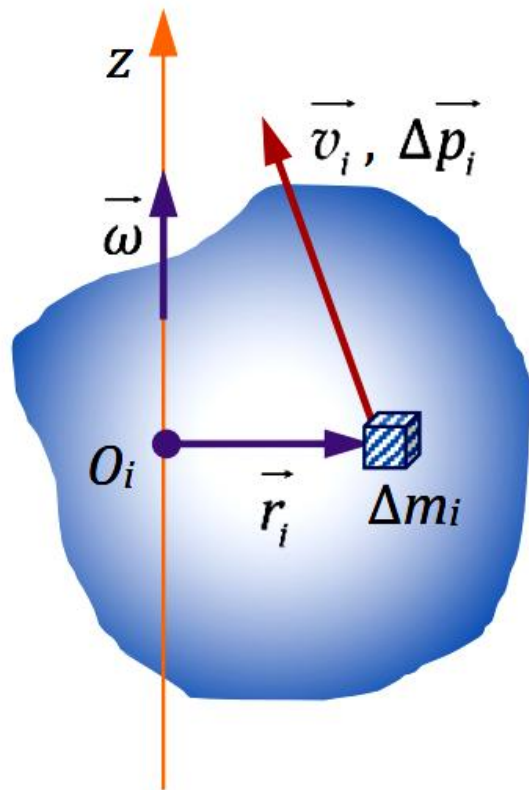
$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad [L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$



Основное уравнения динамики вращательного движения в дифференциальной форме

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Момент импульса



Момент импульса механической системы равен сумме моментов импульсов тел (материальных точек), составляющих эту систему

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

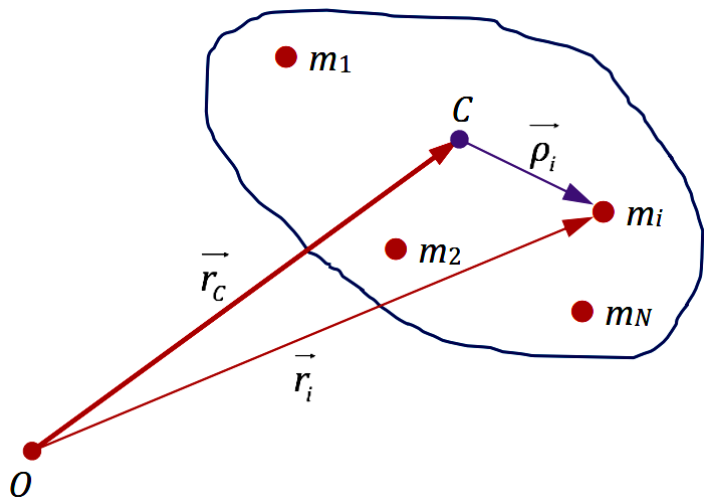
Момент импульса твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum \Delta \vec{L}_i = \sum [\vec{r}_i, \Delta \vec{p}_i] = \sum [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i] = \sum [\vec{r}_i, \Delta m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] \\ &= \sum \Delta m_i \left\{ \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i \left(\vec{\omega}, \vec{r}_i \right) \right\} = \vec{\omega} \sum \Delta m_i r_i^2 = I \vec{\omega}\end{aligned}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Момент импульса

Момент импульса твёрдого тела, совершающего плоское движение



$$\vec{L} = [\vec{r}_C, \vec{P}] + \vec{L}_C$$

$$\vec{L} = \sum \Delta \vec{L}_i = \sum [\vec{r}_i, \Delta \vec{p}_i] = \sum [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{u}_i = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum [\vec{r}_C + \vec{\rho}_i, \Delta m_i (\vec{v}_C + \vec{u}_i)] \\ &= \sum \Delta m_i \{ [\vec{r}_C, \vec{v}_C] + [\vec{r}_C, \vec{u}_i] + [\vec{\rho}_i, \vec{v}_C] + [\vec{\rho}_i, \vec{u}_i] \} \\ &= [\vec{r}_C, \vec{v}_C] \sum \Delta m_i + [\vec{r}_C, \sum \Delta m_i \vec{u}_i] + \left[\sum \Delta m_i \vec{\rho}_i, \vec{v}_C \right] \\ &\quad + \sum [\vec{\rho}_i, \Delta m_i \vec{u}_i] \\ &= [\vec{r}_C, M \vec{v}_C] + \left[\vec{r}_C, \frac{d}{dt} \sum \Delta m_i \vec{\rho}_i \right] + \sum \Delta m_i [\vec{\rho}_i, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]] \\ &= [\vec{r}_C, \vec{P}] + \vec{\omega} \sum \Delta m_i \rho_i^2 = [\vec{r}_C, \vec{P}] + I_C \vec{\omega} \end{aligned}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e$$

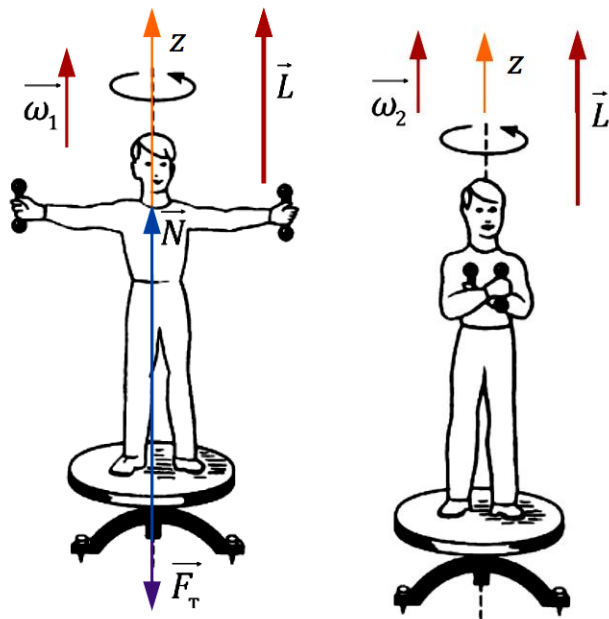
Если механическая система замкнута

$$\vec{M}^e = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной оси (либо точки) не изменяется с течением времени



Если система не является замкнутой, но относительно некоторой оси моменты внешних сил равны нулю либо скомпенсированы, то момент импульса системы относительно этой оси не изменяется с течением времени



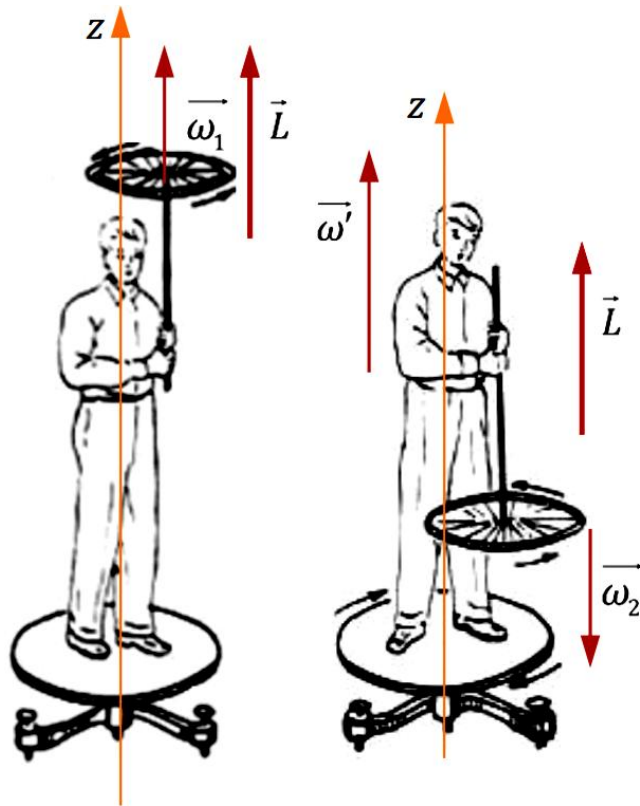
Экспериментатор стоит на скамье Жуковского, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$. В разведённых в стороны руках экспериментатор держит гантели. Затем экспериментатор сводит руки так, что расстояние от гантелей до оси уменьшается. Как изменится угловая скорость системы?

$$\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2 = \vec{L}_2$$

$$\vec{\omega}_2 = \frac{I_1}{I_2} \vec{\omega}_1$$

Так как $I_2 < I_1$ (в конечном положении гантели находятся ближе к оси), угловая скорость системы увеличивается

ЗСМИ Пример



Экспериментатор стоит на неподвижной скамье Жуковского. Ему в руки дают ось колеса, вращающегося с угловой скоростью ω , направленную вертикально вверх. Затем экспериментатор поворачивает ось колеса вниз. С какой угловой скоростью начнёт вращаться скамья?

$$\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1 = I_1 \vec{\omega} = I_1 \vec{\omega}_2 + I_2 \vec{\omega}' = -I_1 \vec{\omega} + I_2 \vec{\omega}' = \vec{L}_2$$

$$\vec{\omega}' = \frac{2I_1}{I_2} \vec{\omega}$$

Скамья будет вращаться в направлении, совпадающем с начальным направлением вращения колеса

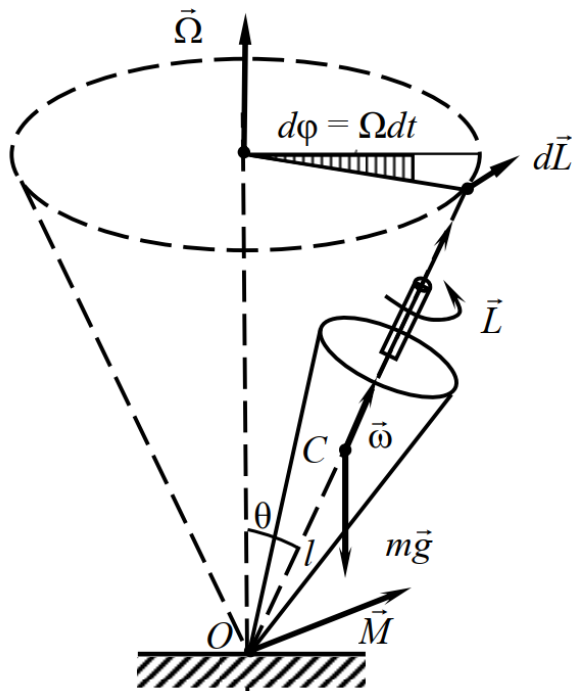
Гироскоп – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого (ось симметрии) может изменять свое направление в пространстве

ось вращения гироскопа должна иметь возможность изменять свое направление в пространстве;

угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть очень велика по сравнению с той угловой скоростью, которую будет иметь сама ось при изменении своего направления.

При таком вращении вокруг своей геометрической оси вектор $\vec{L}$ (как и вектор $\vec{\omega}$) будет направлен вдоль оси тела





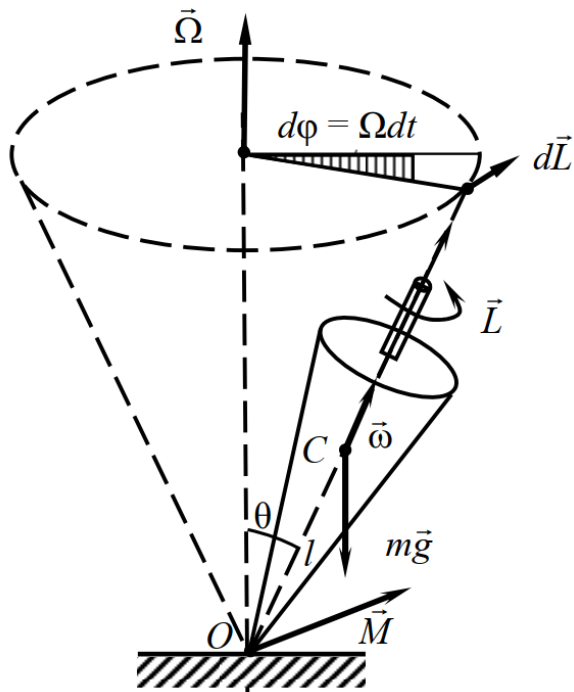
волчок, опертый в одной своей нижней точке

если ось вращающегося волчка отклонена от вертикали, то волчок не падает, а совершает *прецессионное движение*: его ось описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью Ω . И чем больше угловая скорость ω вращения волчка вокруг своей оси, тем меньше угловая скорость прецессии Ω

$$M = Pl \sin \theta = mgl \sin \theta$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \Rightarrow \vec{L} \perp d\vec{L}$$

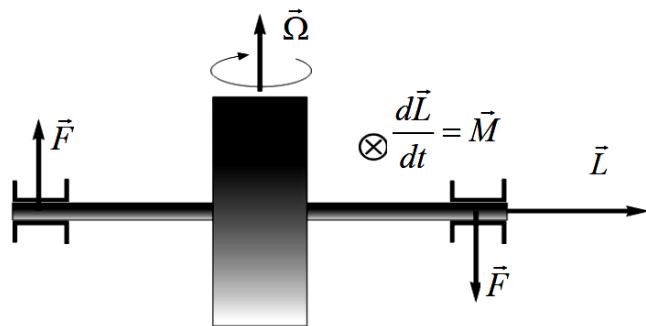
вектор $\vec{L}$ (и ось волчка) будет поворачиваться вместе с вектором $\vec{M}$ вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус



Угловая скорость прецессии

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} \quad d\phi = \frac{dL}{L}$$

$$\Omega = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega \sin \theta} = \frac{mgl}{I\omega}$$



Ось гироскопа начинает вращаться вокруг вертикальной оси со скоростью Ω . Собственный момент импульса гироскопа $\vec{L}$ начинает вращаться со скоростью $\vec{\Omega}$ в горизонтальной плоскости

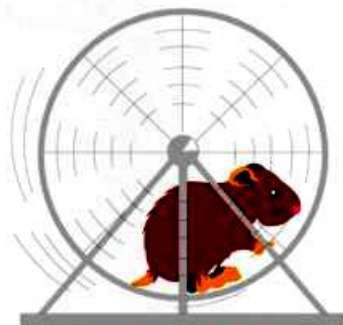
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{L}]$$

Для обеспечения такого изменения момента импульса требуется момент сил $\vec{M}$, который создается в результате действия сил $\vec{F}$, со стороны подшипников на ось гироскопа.

Эти силы называются *гироскопическими*, а их появление называют *гироскопическим эффектом*

$$F = \frac{\Omega L}{l}$$

ХОЧЕШЬ ЖИТЬ -
УМЕЙ ВЕРТЕТЬСЯ,



ХОЧЕШЬ ХОРОШО ЖИТЬ -
УМЕЙ РАСКРУЧИВАТЬСЯ

**Спасибо
за внимание!**

ITMO *re than a*
UNIVERSITY

nnkhvastunov@itmo.ru