Физические основы компьютерных и сетевых технологий

Семестр 2. Колебания и волны

Музыченко Я.Б.
muzychenko@itmo.ru
2024

Лекция 7. Вынужденные колебания. Сложение колебаний.

https://www.youtube.com/watch?v=znXqwsBVyCU&feature=emb_logo

Музыченко Я.Б.
muzychenko@itmo.ru
2024

План лекции

- Вынужденные колебания
- Явление резонанса. Где применяют?
- Сложение колебаний
- Биения
- Фигуры Лиссажу

Что такое вынужденные колебания и как и математически описать?

Как складывать колебания с помощью фазовой диаграммы?

Где можно увидеть биения и фигуры Лиссажу?

Что такое резонанс? Где опасен, а где полезен?

Дополнительные источники:

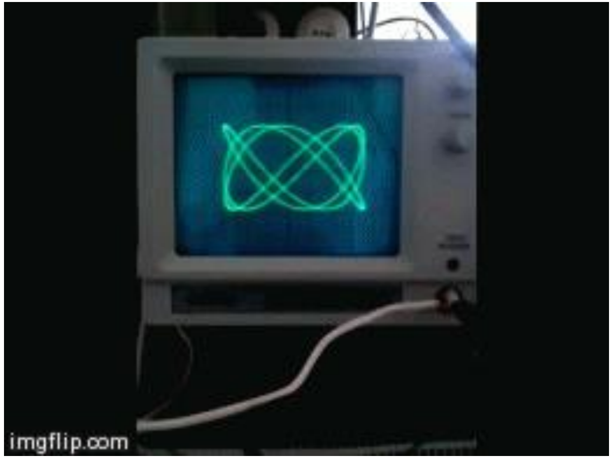
Савельев, Электричество и магнетизм, Уравнения Максвелла.

МФТИ, Курс лекций Крымского К.М.,

https://www.youtube.com/watch?v=yaRBwpq2O5M&feature=emb_logo

Walter Lewin, 8.03

https://www.youtube.com/watch?v=ckUyN5XNG0Y&list=PLyQSN7X0ro2314mKyUiOILaOC2hk6Pc3j&index=23



Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – колебания под действием внешней силы. Рассмотрим гармонический осциллятор, колеблющийся под действием силы F_0 и LCR контур, на источник питания которого подается переменное напряжение.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \qquad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos(\omega t)} \qquad \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \beta = \frac{r}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Вынужденные колебания:

Общее решение неоднородного ДУ является суммой общего решения соответствующего однородного ДУ и частного решения неоднородного ОДУ.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

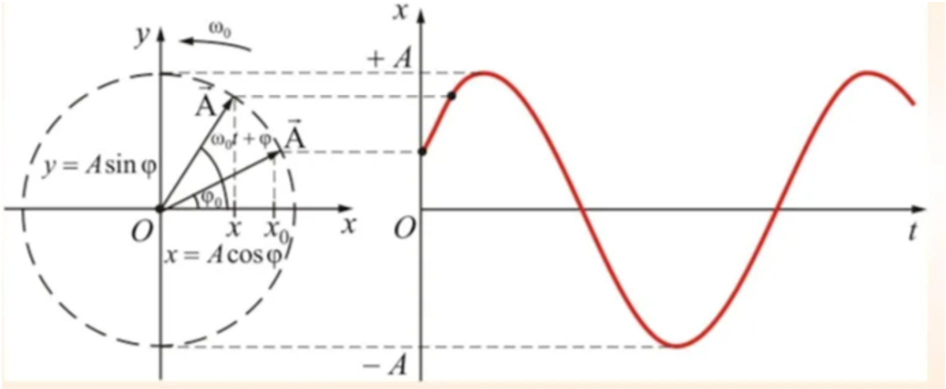
$$\mathrm{x}(t) = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi') \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Частное решение? Предположим?

$$\mathrm{x}(t) = a\cos(\omega t - \varphi)$$

Проверим?

Метод векторных диаграмм:

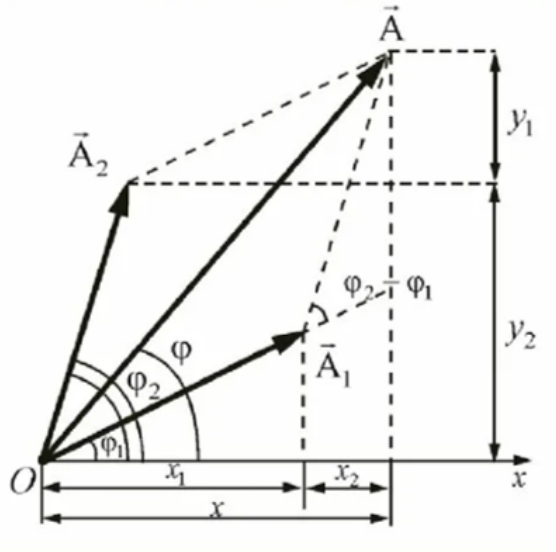


Гармоническое колебание задается с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, а направление образует угол с осью *ox*, равный начальной фазе.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Метод векторных диаграмм широко используется при **сложении колебаний.** Угол между любыми двумя векторами, характеризующими колебания равен разности фаз соответствующих колебаний.

Сложение колебаний одного направления:



$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

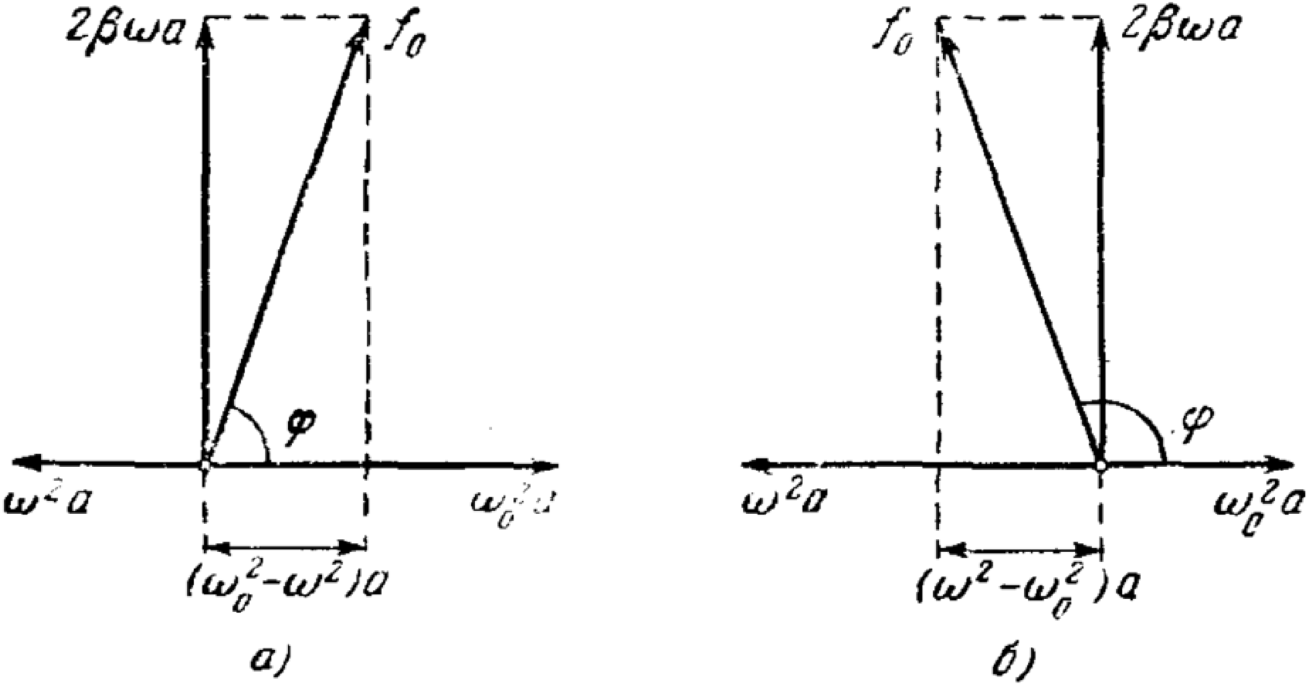
$$x = x_1 + x_2$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$A = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\right) =$$
$$= \boldsymbol{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

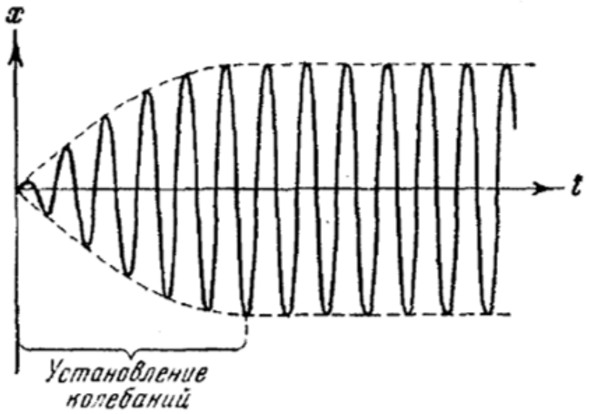
$$tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$

Сложение колебаний одного направления:



Вынужденные колебания:

Общее решение играет роль только в начальной стадии процесса. Установившиеся колебания представляют собой гармонические колебания с частотой равной частоте вынуждающей силы.



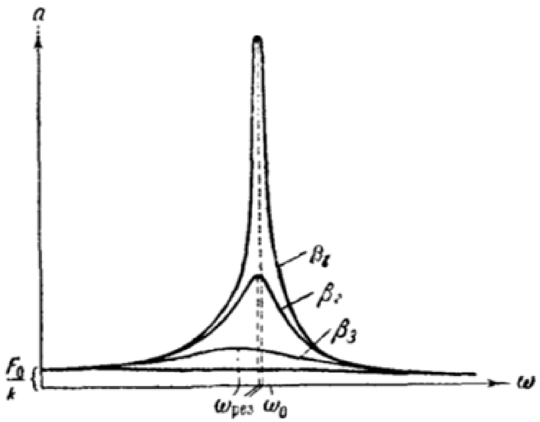
$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Зависит от частоты!!!

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Резонанс:

Резкое возрастание амплитуды колебаний на резонансной частоте.



$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Связь с добротностью (при малых затуханиях):

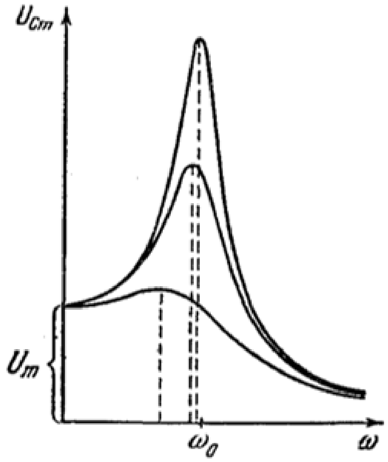
$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

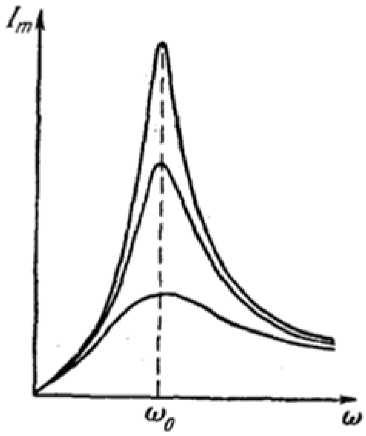
$$a = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_0$$ (при ω=0)

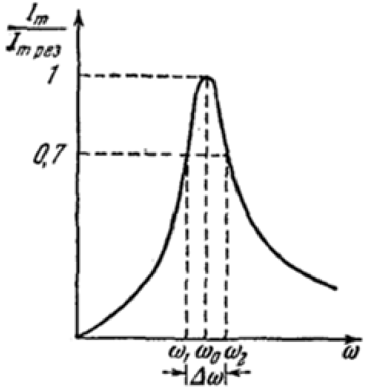
$$\frac{a_{\text{рез}}}{x_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

Резонанс:

- графики зависимостей амплитудных значений *q*, *I*, *U* от частоты внешней вынуждающей силы.



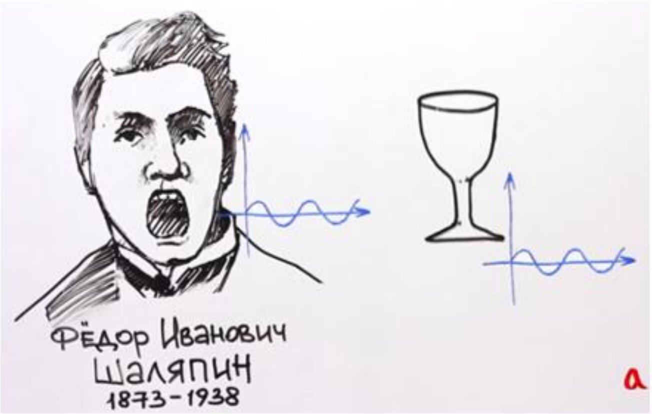




$$\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Резонанс:



https://www.youtube.com/watch?v=qHJjX8egF58

ЯМР

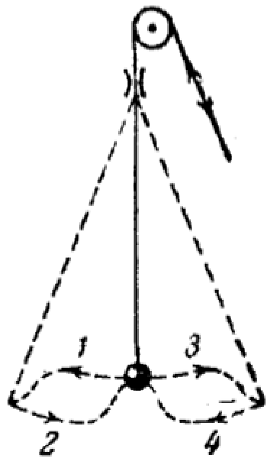
Ядерный магнитный резонанс – резонансное поглощение эм излучения ядрами атомов (например, водорода).

Нобелевские премии:

1. Раби (1944), за открытие явления - Физика
2. Парселл, Блох (1950), за открытие в жидкостях и твердых телах - Физика
3. Эрнст (1991), за развитие ЯМР высокого разрешения - Химия
4. Вютрих (2002), применение для исследования биологических объектов - Химия
5. Лотербур, Мэсфилд (2003) – МРТ – Медицина и физиология

Параметрический резонанс

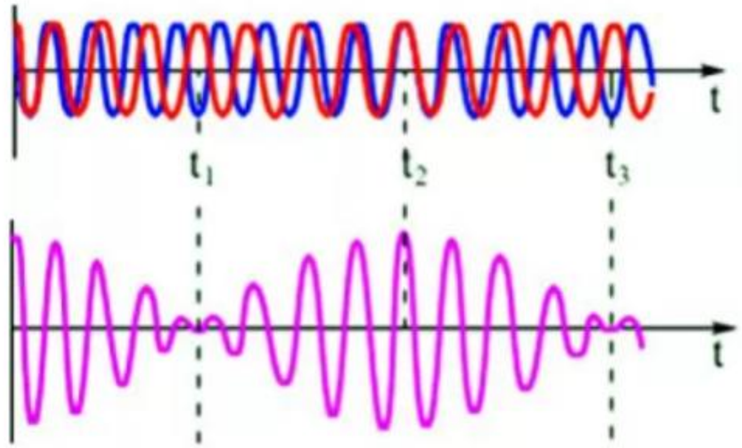
Резонанс, возникающий в системе при периодическом изменении одного из параметров системы. Изменение происходит в такт колебаниям системы.



Пример: длина маятника постоянно меняется при колебаниях, что приведет к сильному раскачиванию маятника. Энергия системы увеличивается за счет работы силы, действующей на нить.

Биения

Биения – периодическое изменение амплитуды в результате сложения колебаний в одном направлении с близкими частотами.



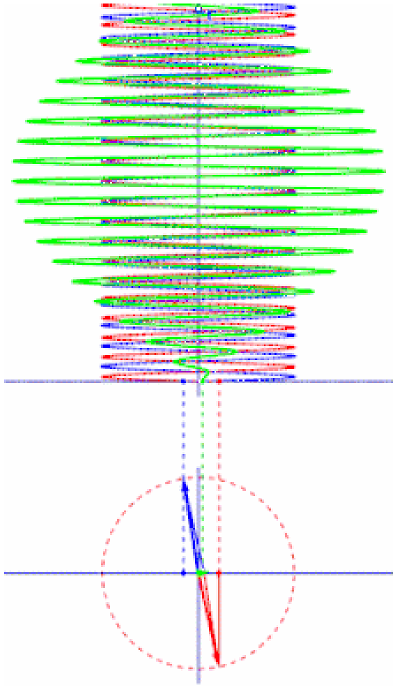
$$x_1 = A\cos(\omega t)$$

$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$

$$\Delta\omega << \omega$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{2\omega + \Delta\omega}{2}t\cos\frac{\Delta\omega t}{2} = 2A\cos\omega t\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$

Биения



$$U(t) = U_0[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} \ll 1$$

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F

Биения

Биения – периодическое изменение амплитуды в результате сложения колебаний в одном направлении с близкими частотами.

$$\boxed{x = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$$

Период биений: $T_б = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$

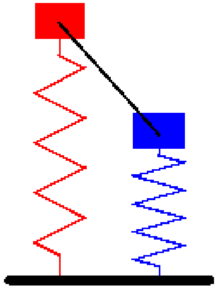
Период колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

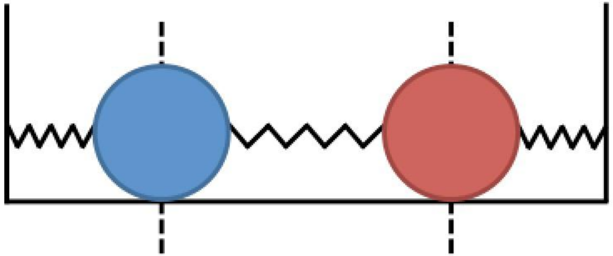
https://www.youtube.com/watch?v=gfC3HXepxgE

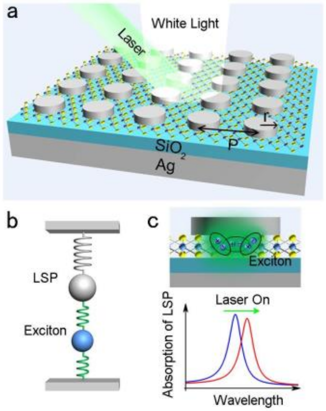
https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=28d50693bf6468465b80ff533f183d6c

Связанные системы

Связанные системы – системы со многими степенями свободы, при колебании которых происходит переход энергии между ними

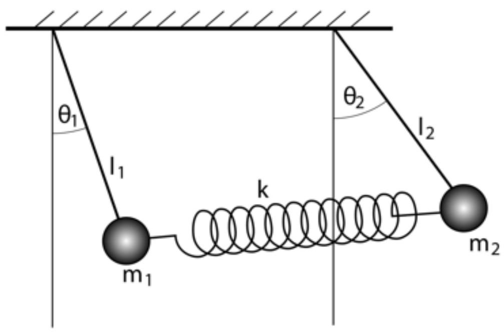


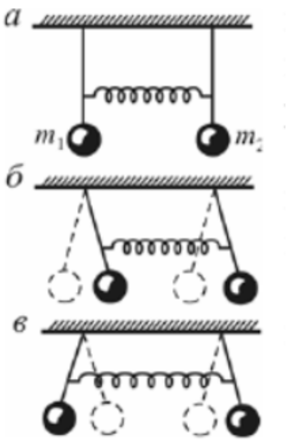




https://www.researchgate.net/publication/301875348_Active_control_of_surface_plasmon_resonance_in_MoS2-Ag_hybrid_nanostructures/download

Связанные маятники



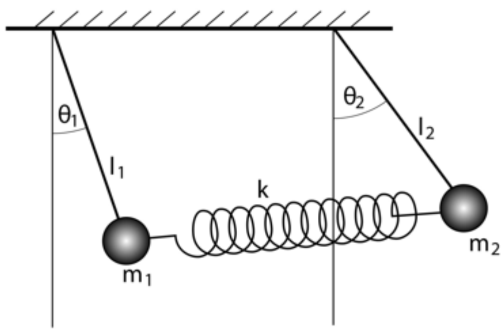


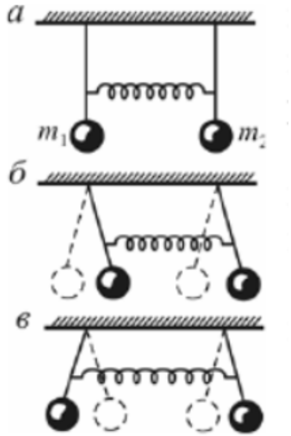
Колебания в связанных системах можно представить как суперпозицию (сумму) нормальных колебаний (мод).

Нормальные моды – колебания всех частиц системы с одной частотой (нормальной частотой). Нормальные колебания (моды) не обмениваются энергией.

Число нормальных мод = числу степеней свободы

Связанные маятники.



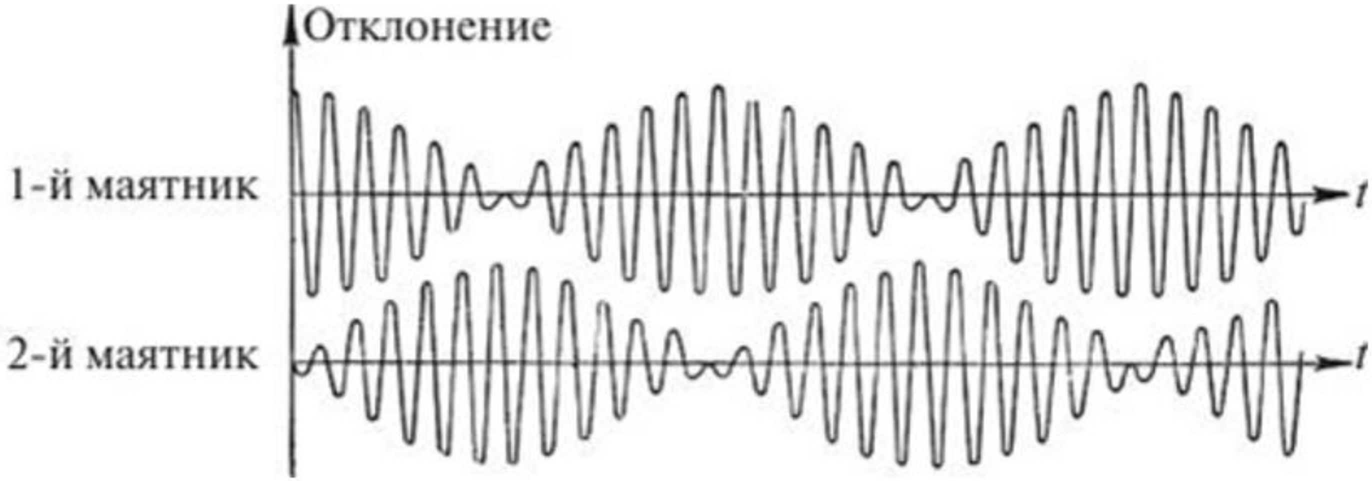


Колебания в связанных системах можно представить как суперпозицию (сумму) нормальных колебаний (мод).

Нормальные моды – колебания всех частиц системы с одной частотой (нормальной частотой). Нормальные колебания (моды) не обмениваются энергией.

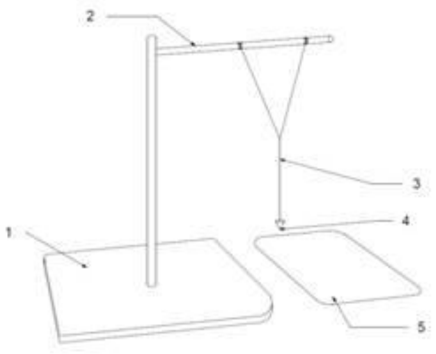
Число нормальных мод = числу степеней свободы

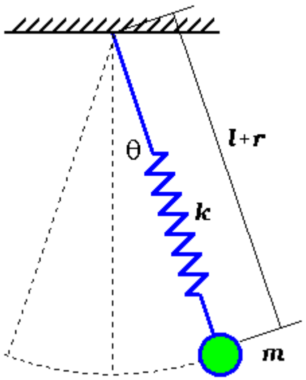
Связанные маятники. Биения

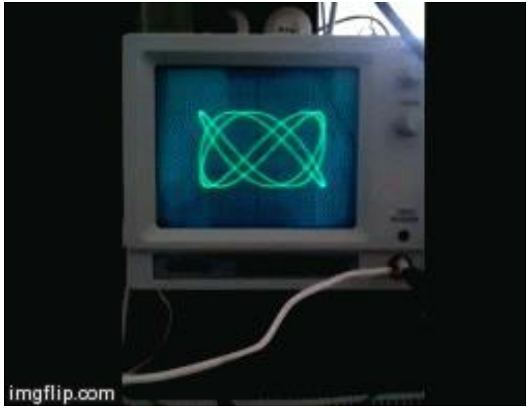


https://www.youtube.com/watch?v=QwKz4x1CNv0&t=80s

Перпендикулярные колебания







Сложение колебаний

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega, \varphi$ – разность фаз

$$x = A_x \cos(\omega t)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A_x}$$

$$\sin\omega t = \sqrt{1 - cos^2(\omega t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{A_y} = (\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)) =$$

$$= \frac{x}{A_x}\cos(\varphi) - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\sin(\varphi)$$

Сложение колебаний

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega, \varphi$ – разность фаз

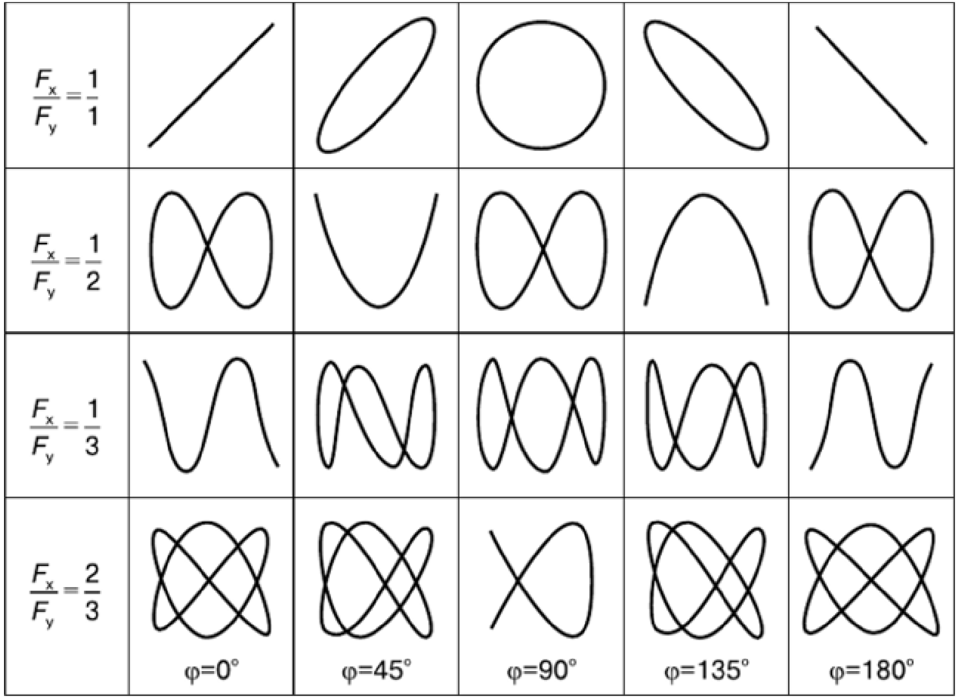
$$\frac{y}{A_y} = \frac{x}{A_x}\cos(\varphi) - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\,\sin(\varphi)$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - \frac{xy}{A_x A_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\cos(\varphi)\right)^2 = sin^2(\varphi) - sin^2(\varphi)\left(\frac{x}{A_x}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{y^2}{A_y^2} - \frac{xy}{A_x A_y}\cos(\varphi) + \frac{x^2}{A_x^2} = sin^2(\varphi)}$$

Уравнение эллипса с произвольной ориентацией осей

Фигуры Лиссажу



Задание к лекции. Вариант 1

1. **Визуализация сложения колебаний. Биения.**

Входные параметры: частоты колебаний, амплитуда

Итоговый вид модели: биения

Задание к лекции. Вариант 2

2. Визуализация сложения колебаний. Фигуры Лиссажу.

Входные параметры: частоты колебаний, амплитуда

Итоговый вид модели: фигуры Лиссажу

Задание к лекции. Вариант 3

1. **Моделирование. Резонансные кривые**

Входные параметры: параметры колебательной системы

Итоговый вид модели: зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы

Задание к лекции. Вариант 4

1. Доказать формулу (Q – добротность). $$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

2. Что называют собственными частотами в связанных колебательных системах? Как найти собственные частоты двух одинаковых маятников, связанных между собой пружиной. Приведите примеры связанных колебаний.

3. (II) The RC circuit shown in Fig. 30–40 is called a **high-pass filter** because it passes high-frequency ac signals with less attenuation than low-frequency ac signals. (*a*) Show that the voltage gain is $A = V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = 2\pi f RC/(4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. (*b*) Discuss the behavior of the gain A for $f \to 0$ and $f \to \infty$. (*c*) Choose $R = 850\,\Omega$ and $C = 1.0 \times 10^{-6}\,\text{F}$, and then graph log A versus log f with suitable scales to show the behavior of the circuit at high and low frequencies.

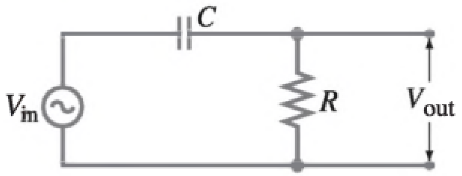


FIGURE 30–40 Problem 104.

Спасибо за внимание!

muzychenko@itmo.ru

BE in LOVE with physics