Физические основы компьютерных и сетевых технологий

Семестр 2. Колебания и волны

Музыченко Я.Б.
muzychenko@itmo.ru
2024

Лекция 6. Колебания

https://www.youtube.com/watch?v=znXqwsBVyCU&feature=emb_logo

Музыченко Я.Б.
muzychenko@itmo.ru
2024

План лекции

- Типы колебаний
- Основные характеристики колебаний
- Механические колебания: маятники
- Электромагнитные колебания: колебательные контуры
- Аналогии между механическими и эм колебаниями
- Затухающие и вынужденные колебания

Как математически описать самое универсальное явление природы?

Какая из характеристик колебательного контура аналогична массе математического маятника?

Что такое фазовый портрет?

Что такое резонанс? Где опасен, а где полезен?

Дополнительные источники:

Савельев, Электричество и магнетизм, Уравнения Максвелла.

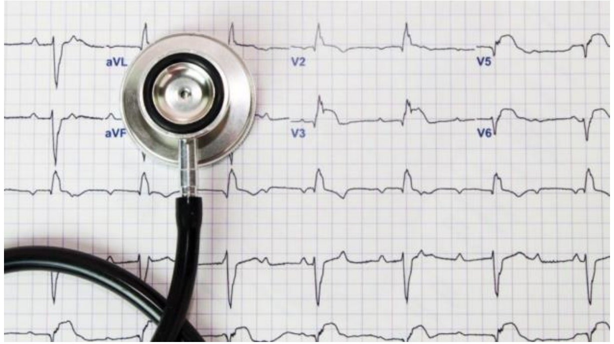
МФТИ, Курс лекций Крымского К.М.,

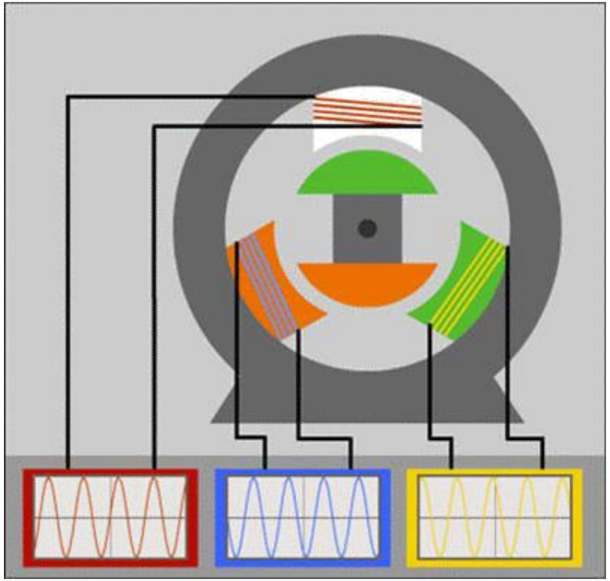
https://www.youtube.com/watch?v=yaRBwpq2O5M&feature=emb_logo

Walter Lewin, 8.03

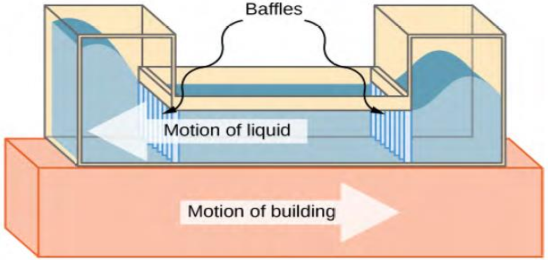
https://www.youtube.com/watch?v=ckUyN5XNG0Y&list=PLyQSN7X0ro2314mKyUiOILaOC2hk6Pc3j&index=23

Колебания





(a)



(b)

Типы колебаний

Колебания – периодические (квазипериодические) процессы, повторяющийся через одинаковые промежутки времени.

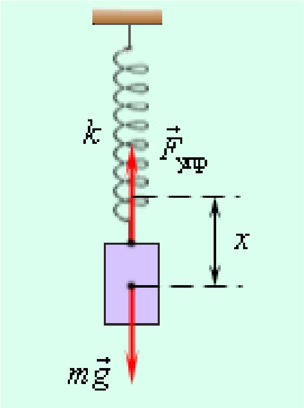
Гармонические колебания – процессы, при которых колеблющаяся величина меняется по закону sin или cos.

Свободные колебания
Вынужденные колебания
Автоколебания
(Не) затухающие колебания

По природе возникновения различают **механические и электромагнитные** колебания.

Механические колебания: гармонический осциллятор

Гармонический осциллятор – система, совершающая колебания под действием (квази)упругой силы.



Здесь вывод на доске

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Решение ОДУ: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

Характеристики колебаний

Гармоническое колебание:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Амплитуда

$$x_0$$

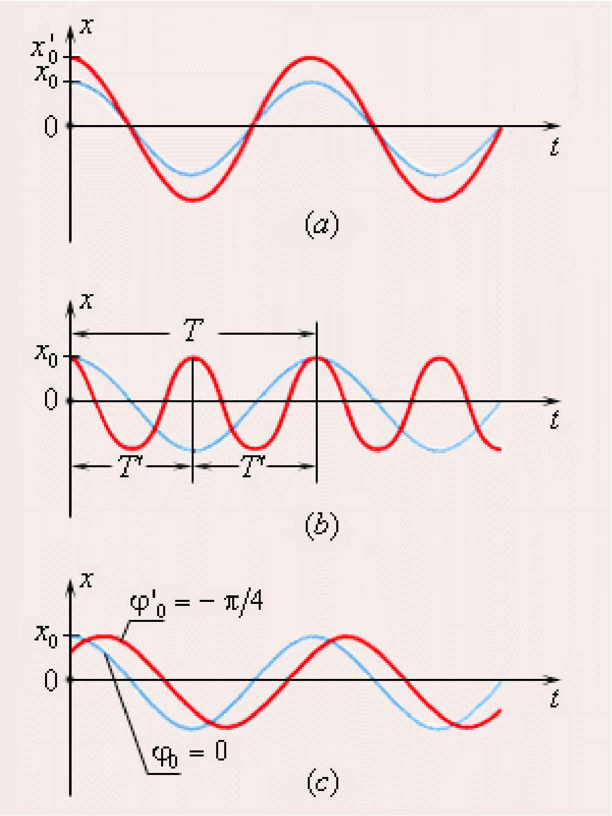
Период T

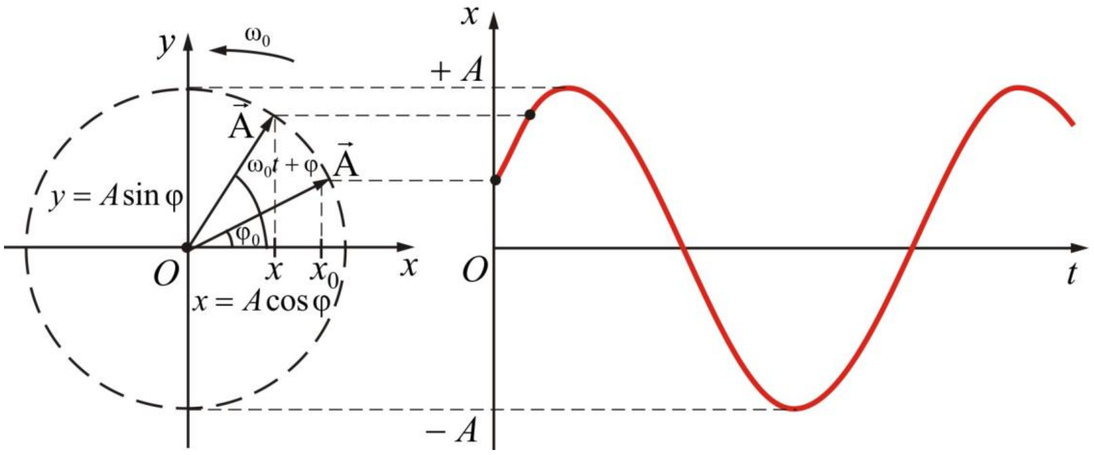
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

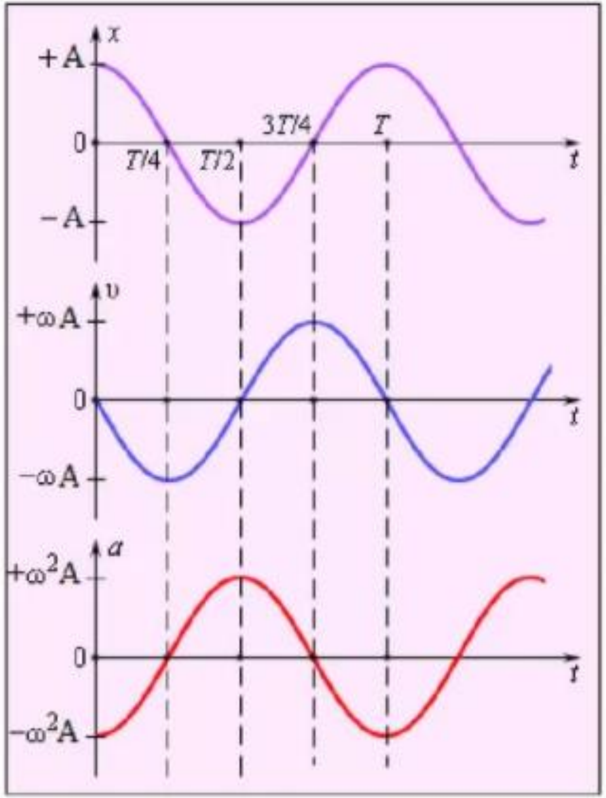
Частота колебаний f

Циклическая (круговая) частота ω_0

Начальная фаза ϕ_0







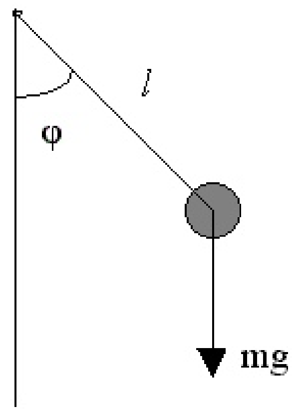
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$a(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Механические колебания: математический маятник

Математический маятник – механическая система, состоящая из материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной *l* и совершающая колебания в однородном поле сил тяжести.



Здесь вывод на доске

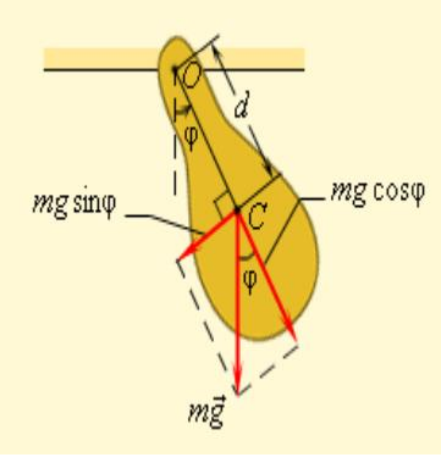
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Решение ОДУ: $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

Механические колебания: физический маятник

Здесь вывод на доске

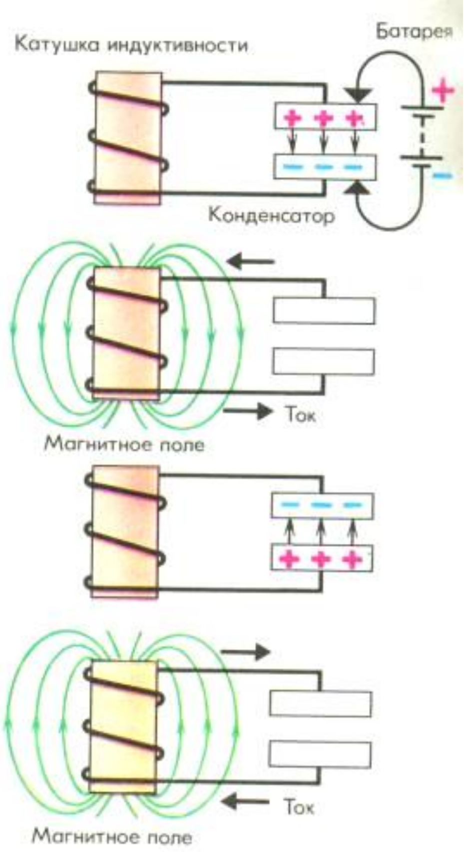


$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl'}}$$

Решение ОДУ: $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

Электромагнитные колебания: LC контур



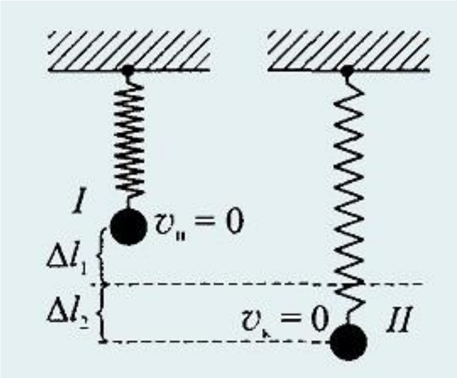
$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

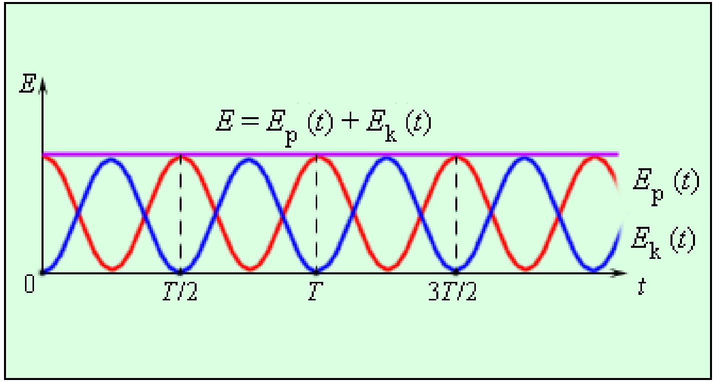
$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Решение ОДУ: $q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

Энергетические превращения: осциллятор

В отсутствии затухания при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

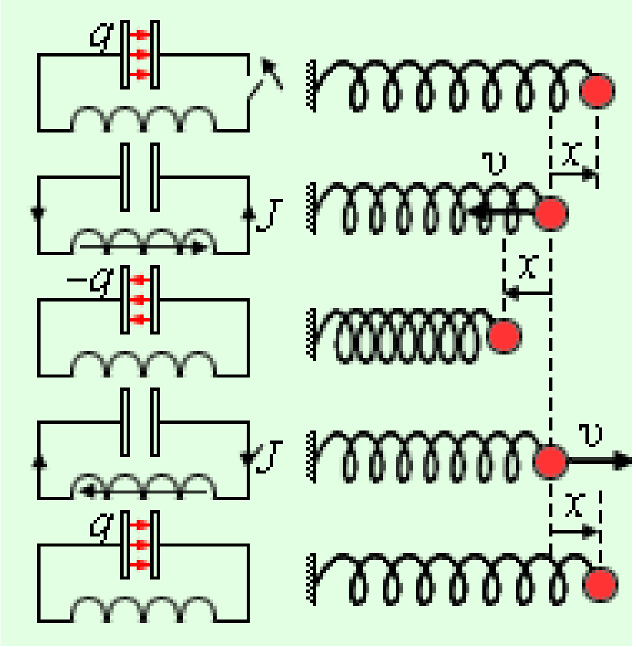


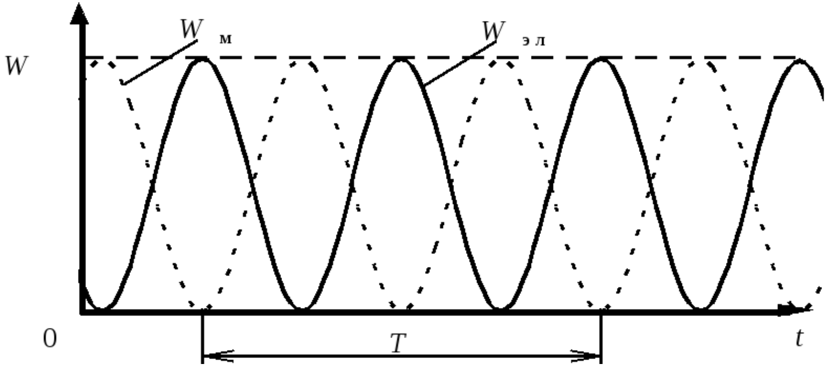


$$E_{мех} = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

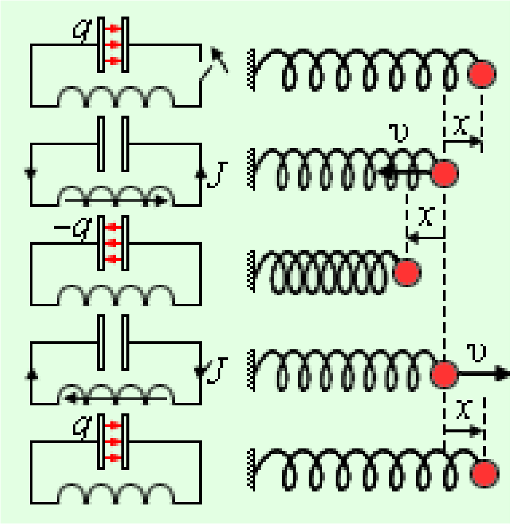
Энергетические превращения: LC контур

В отсутствии затухания при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение энергии электрического поля в конденсаторе в энергию магнитного поля соленоида.





Механические vs электромагнитные колебания

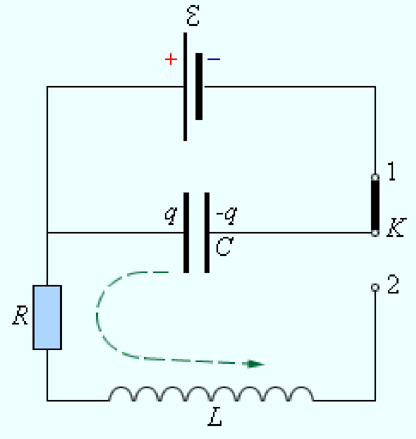


Механические величины	Электромагнитные величины
x	
v	
$kx^2/2$	$q^2/2C$
$mv^2/2$	$LI^2/2$

Уравнение свободных колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Затухающие колебания. LCR контур



$$RI + U = \varepsilon_S$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

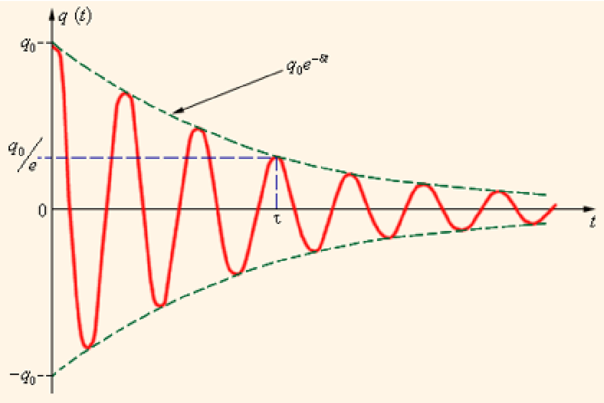
$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

$\beta = \dfrac{R}{2L}$ - коэффициент затухания колебаний.

Найдем решение:

Решение уравнения затухающих колебаний

Решение уравнения свободных затухающих колебаний:



$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где ω:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период свободных затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}}$$

Характеристики колебаний

Время релаксации τ – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e (~ 2.7) раз.

Коэффициент затухания β

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\tau}$$

Логарифмический декремент затухания λ

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

При малых затуханиях ($\beta^2 << \omega_0^2$)

$$\lambda \approx \beta T_0 \approx \beta\frac{2\pi}{\omega_0}$$

ИТМО

Добротность колебательного контура Q – отношение запасенной энергии в контуре к энергии, теряемой системой за один период.

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t+T) - W(t)} = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

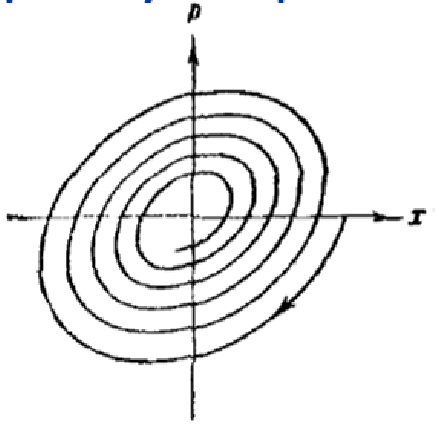
При малых затуханиях ($\beta^2 << \omega_0^2$)

$$Q = \frac{\pi}{\beta T_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Фазовый портрет

Зависимость импульса от координаты

Для затухающих колебаний:



Для свободных незатухающих колебаний?

На следующей лекции:

https://www.youtube.com/watch?v=znXqwsBVyCU&feature=emb_logo

Задание к лекции. Вариант 1

ИТМО

1. **Моделирование. Затухающие колебания в LCR контуре.**

Входные параметры: индуктивность, сопротивление, емкость конденсатора

Итоговый вид модели: Зависимость силы заряда, силы тока и напряжения от времени.

Задание к лекции. Вариант 2

1. **Моделирование. Затухающие колебания в LCR контуре. Фазовый портрет**

Входные параметры: индуктивность, сопротивление, емкость конденсатора

Итоговый вид модели: Фазовый портрет колебаний

Задание к лекции. Вариант 3

1. Почему в данном выражении множители перед синусом и косинусом должны быть равны нулю?

$$\cos(\omega t+\varphi_0)(\ddot{a}-a\omega^2+2\beta\dot{a}+\omega_0^2 a) - \sin(\omega t+\varphi_0)(2\dot{a}\omega+2a\beta\omega)=0$$

2. Что такое фазовый портрет колебаний? В каких случаях его удобно использовать для описания колебательной системы?

3. В лекции были получены решения уравнений для математического маятника в случае малых колебаний. Как найти период колебаний маятника, когда угол отклонения маятника от положения равновесия больше 5 градусов?

To prevent damage from arcing in an electric motor, a discharge resistor is sometimes placed in parallel with the armature. If the motor is suddenly unplugged while running, this resistor limits the voltage that appears across the armature coils. Consider a 12.0-V DC motor with an armature that has a resistance of 7.50 Ω and an inductance of 450 mH. Assume the magnitude of the self-induced emf in the armature coils is 10.0 V when the motor is running at normal speed. (The equivalent circuit for the armature is shown in Fig. P32.81.) Calculate the maximum resistance R that limits the voltage across the armature to 80.0 V when the motor is unplugged.

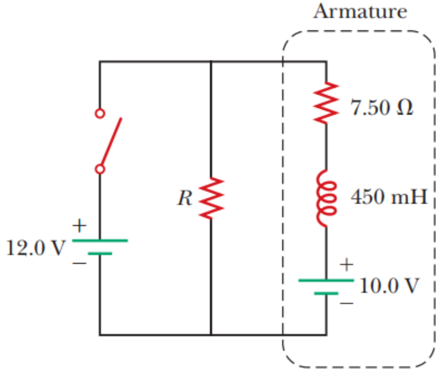


Figure P32.81

Спасибо за внимание!

muzychenko@itmo.ru

BE in LOVE with physics