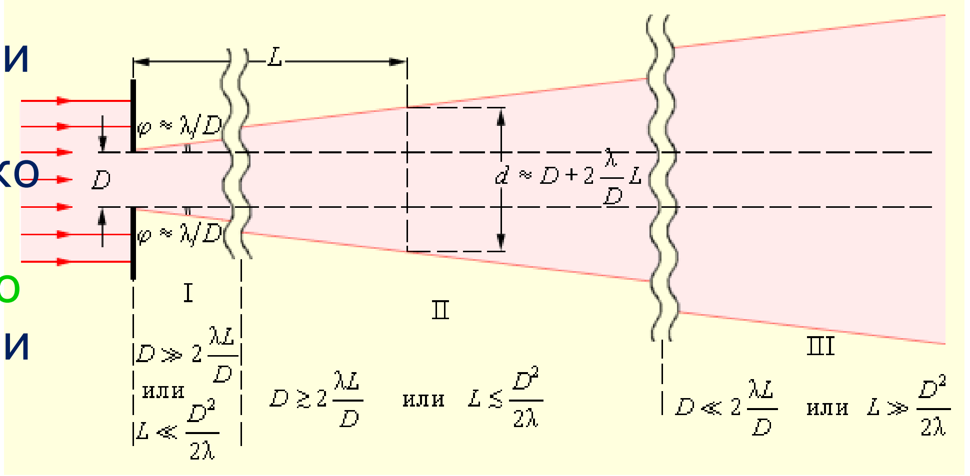
Оптика

Лекция 13

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

Различают два вида дифракции. Если источник света и точка наблюдения расположены друг от друга настолько далеко, что световые лучи можно считать параллельными, то говорят о дифракции Фраунгофера. Если лучи нельзя считать параллельными, то говорят о дифракции Френеля.



Жан Огюстен Френель
1788 – 1827
французский физик

Йозеф Фраунгофер
1787 – 1826
немецкий физик

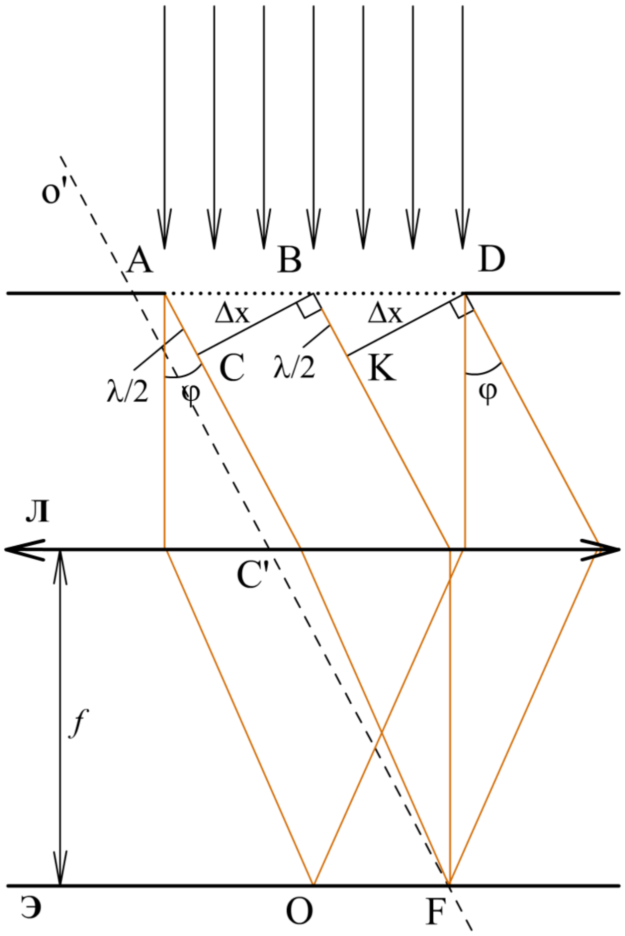
Интегралы Френеля и Фраунгофера

$$U(x,y,z)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(x',y',0)\exp\left(\frac{ik\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]}{2z}\right)dx'dy'$$

$$U(x,y,z)=$$

$$\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik\left(x^2+y^2\right)}{2z}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x',y',0)\exp\left(\frac{-ik\left[xx'+yy'\right]}{z}\right)dx'dy'$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА ОТ ЩЕЛИ



Пусть на длинную щель (длина много больше ширины щели) перпендикулярно к ней падает плоская световая волна.

Поместим за щелью собирающую линзу, а в ее фокальной плоскости экран. Плоскости щели, линзы и экрана параллельны друг другу.

Разобьем открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели элементарные прямоугольные зоны шириной dx.

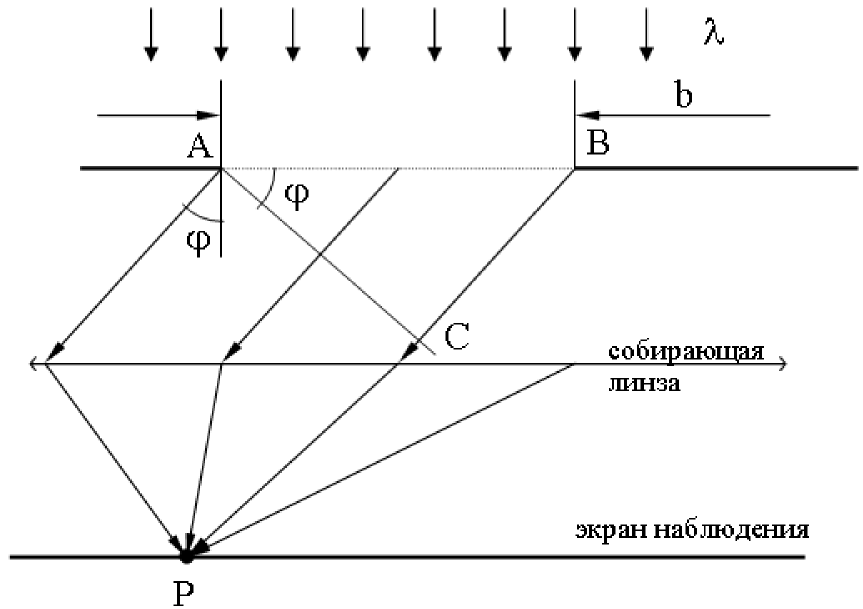
Вторичные волны, посылаемые зонами под углом φ к оптической оси системы, соберутся на экране в определенной точке F.

Каждая элементарная зона создает в точке F свой вклад в результирующее колебание

$$dE_\varphi = dA_\varphi \exp\left[i(\omega t + \alpha_\varphi) \right].$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА ОТ ЩЕЛИ

Ограничившись рассмотрением малых углов дифракции φ, можно считать, что амплитуда колебаний создаваемая элементарной зоной одинакова по разным направлениям.



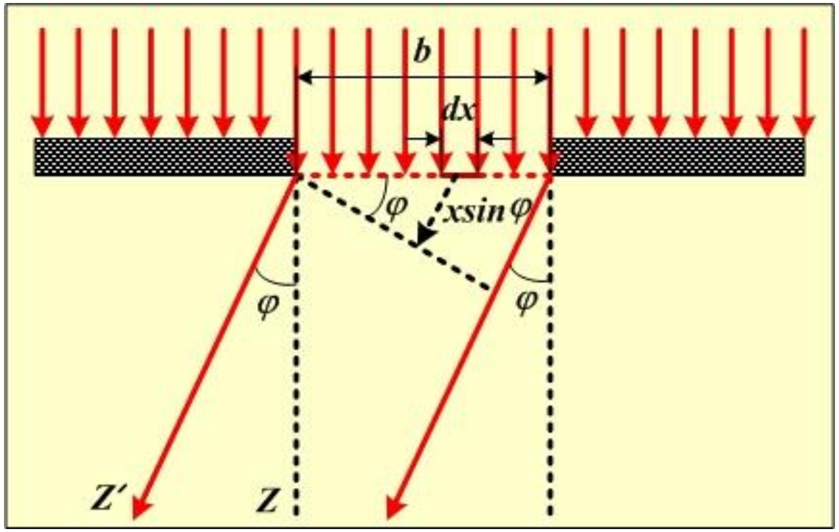
Тогда амплитуда колебания каждой элементарной зоны в любой точке экрана будет зависеть только от площади зоны, пропорциональной ширине зоны dx, то есть

$$dA_\varphi = dA = Cdx, \quad C = const.$$

Обозначим алгебраическую сумму амплитуд колебаний, возбуждаемых в некоторой точке экрана всеми зонами через A_0. Найдем эту амплитуду, проинтегрировав вклады dA по всей ширине щели b:

$$A_0 = \int dA = \int_0^b Cdx = C\int_0^b dx = Cb \Rightarrow \qquad C = \frac{A_0}{b} \Rightarrow \qquad dA = \frac{A_0}{b}dx.$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА ОТ ЩЕЛИ



Мы установили, что всякая элементарная зона создает в точке наблюдения на экране свое колебание вида

$$dE_\varphi = \frac{A_0}{b}dx\exp\left[i(\omega t + \alpha_\varphi)\right].$$

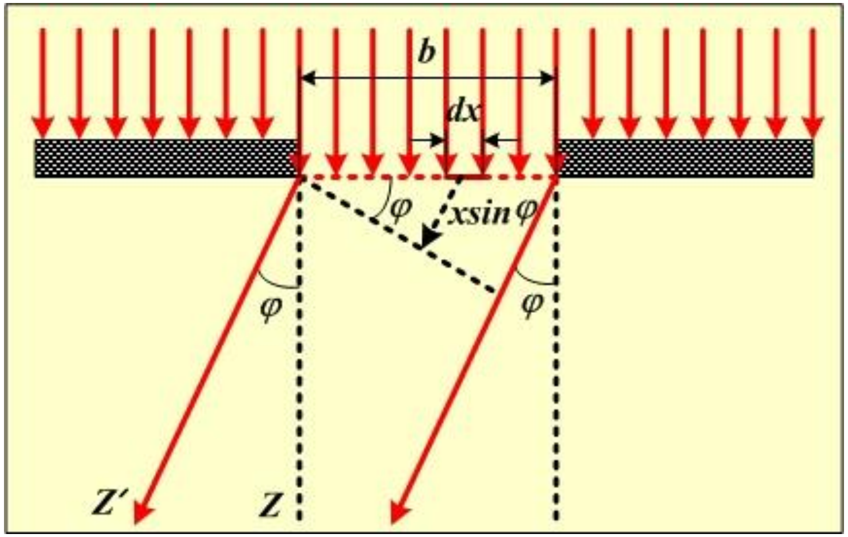
Теперь определим фазовые соотношения между колебаниями dE_φ, для зон с различными координатами x.

Пусть будет нулевой начальная фаза колебания, возбуждаемого в точке наблюдения на экране элементарной зоной, расположенной на щели в точке с координатой $x = 0.$

Тогда для элементарной зоны в точке с координатой x отставание по фазе будет формироваться на разности хода $\Delta = x\sin\varphi.$ Таким образом

$$\alpha_\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta = -\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi \Rightarrow \ dE_\varphi = \frac{A_0}{b}dx\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right].$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА ОТ ЩЕЛИ



Колебание, возбуждаемое элементарной зоной с координатой x в точке экрана, положение которой определяется углом φ, может быть представлено в виде

$$dE_\varphi = \frac{A_0}{b} dx \exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin\varphi \right)\right]$$

(имеется в виду вещественная часть этого выражения).

Результирующее колебание, возбуждаемое в точке наблюдения на экране всей щелью, найдем в результате интегрирования по ширине щели:

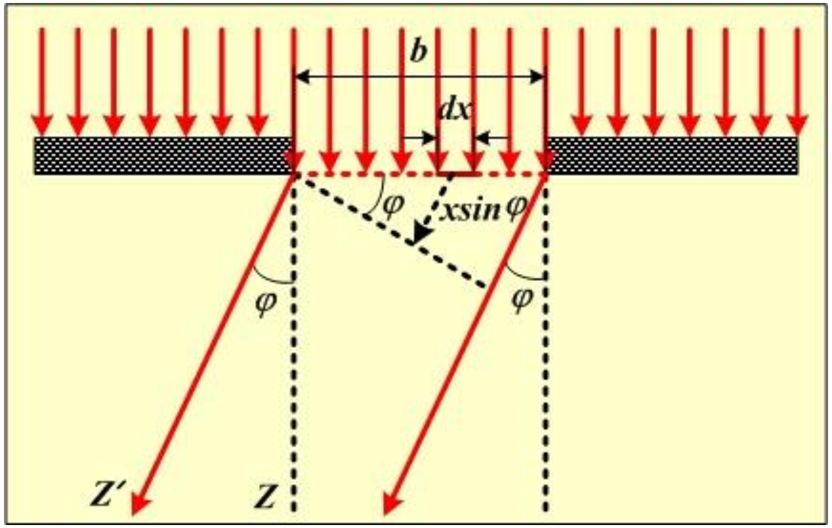
$$E_\varphi = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{b} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin\varphi \right)\right] dx.$$

Для упрощения вычисления интеграла точка $x = 0$ помещена в середину щели.

Введем обозначение $\gamma \equiv \frac{\pi}{\lambda}\sin\varphi,$ тогда интеграл примет вид

$$E_\varphi = \frac{A_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(i\omega t)\exp(-2i\gamma x)dx \Rightarrow \quad E_\varphi = \frac{A_0}{b}\exp(i\omega t) \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(-2i\gamma x)dx.$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА ОТ ЩЕЛИ



Для результирующего колебания, создаваемого волнами идущими от щели под углом φ к оптической оси системы, получено интегральное выражение

$$E_\varphi = \frac{A_0}{b}\exp(i\omega t)\int\limits_{-b/2}^{+b/2}\exp(-2i\gamma x)dx.$$

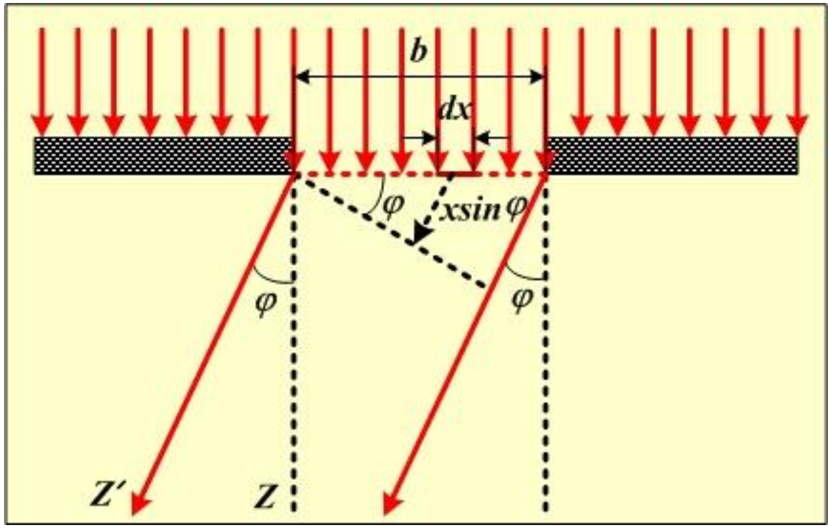
В результате вычисления получим:

$$E_\varphi = \frac{A_0}{b}\frac{\exp(i\omega t)}{(-2i\gamma)}\int\limits_{-b/2}^{+b/2} exp(-2i\gamma x)d(-2i\gamma x) \Rightarrow \quad E_\varphi = \frac{A_0}{b}\frac{\exp(i\omega t)}{(-2i\gamma)}\exp(-2i\gamma x)\Big|_{-b/2}^{+b/2} \Rightarrow$$

$$E_\varphi = \exp(i\omega t)\left\{\frac{A_0}{\gamma b}\cdot\frac{1}{(-2i)}\left[\exp(-i\gamma b)-\exp(i\gamma b)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$E_\varphi = \exp(i\omega t)\left\{\frac{A_0}{\gamma b}\cdot\frac{1}{(2i)}\left[\exp(i\gamma b)-\exp(-i\gamma b)\right]\right\}.$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА ОТ ЩЕЛИ



Результат сложения всех волн, идущих от щели в заданном направлении имеет вид

$$E_\varphi = \exp(i\omega t)\left\{\frac{A_0}{\gamma b}\cdot\frac{1}{(2i)}\left[\exp(i\gamma b)-\exp(-i\gamma b)\right]\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках задает комплексную амплитуду $\hat{A}_\varphi$ суммарного колебания.

Воспользуемся формулой Эйлера:

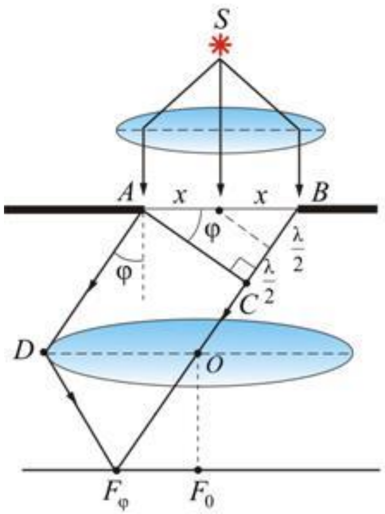
$$\exp(i\gamma b)=\cos(\gamma b)+i\sin(\gamma b);\quad \exp(-i\gamma b)=\cos(\gamma b)-i\sin(\gamma b)\Rightarrow$$

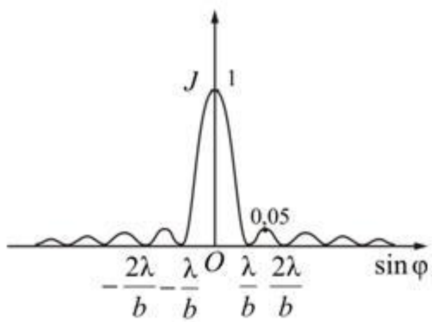
$$\exp(i\gamma b)-\exp(-i\gamma b)=2i\sin(\gamma b).$$

После преобразования по формуле Эйлера выражение для комплексной амплитуды примет вид

$$\hat{A}_\varphi=\frac{A_0}{\gamma b}\cdot\frac{1}{2i}\cdot 2i\sin(\gamma b)=A_0\frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b};\quad \gamma\equiv\frac{\pi}{\lambda}\sin\varphi\Rightarrow\quad \hat{A}_\varphi=A_0\frac{\sin(\pi b\sin\varphi/\lambda)}{\pi b\sin\varphi/\lambda}.$$

ДИФРАКЦИЯ ОТ ЩЕЛИ. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ





Выражение для комплексной амплитуды

$$\hat{A}_\varphi = A_0 \frac{\sin(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{\pi b \sin\varphi/\lambda}$$

является вещественным. Его модуль определяет амплитуду результирующего колебания для волн, идущих от щели под углом φ к оптической оси системы

$$A_\varphi = A_0 \left| \frac{\sin(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{\pi b \sin\varphi/\lambda} \right|.$$

Для точки, лежащей против центра линзы, $\varphi = 0$. Подстановка этого значения в формулу для амплитуды приводит к значению $A_\varphi(0) = A_0$.

Этот результат легко объяснить. При $\varphi = 0$ колебания от элементарных зон приходят в точку наблюдения F_0 в одинаковой фазе. Следовательно амплитуда результирующего колебания равна алгебраической сумме амплитуд складываемых колебаний от всех элементарных зон.

При значениях угла φ, удовлетворяющих условию $\pi b \sin\varphi/\lambda = \pm m\pi \Rightarrow$ $b\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$, амплитуда A_φ обращается в нуль.

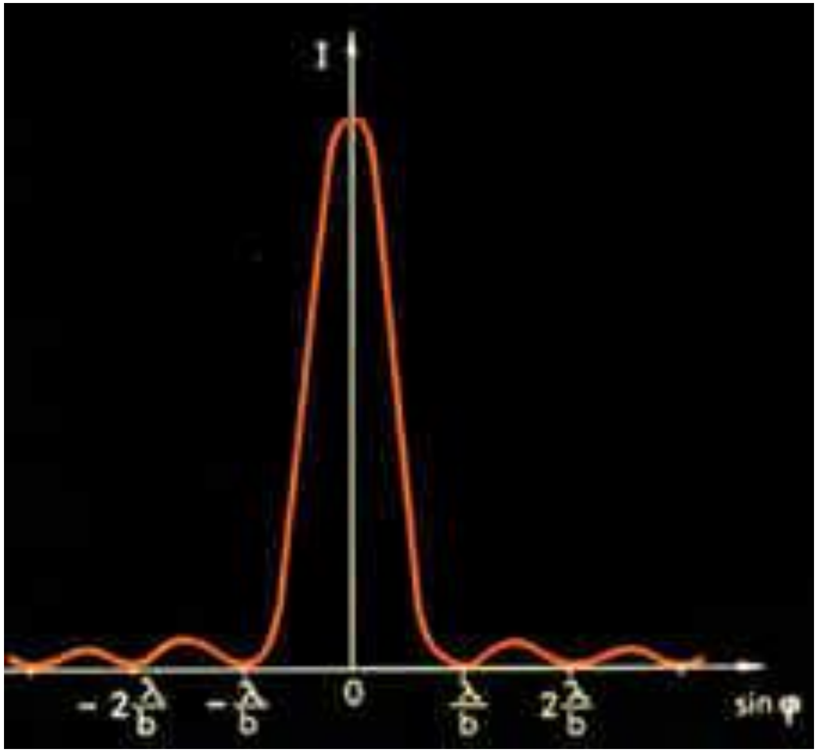
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно

$$I_\varphi \sim A_\varphi^2 = A_0^2 \frac{\sin^2(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{(\pi b \sin\varphi/\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{(\pi b \sin\varphi/\lambda)^2},$$

где I_0 – интенсивность света в середине дифракционной картины (против центра линзы), I_φ – интенсивность в точке, положение которой задается углом φ.

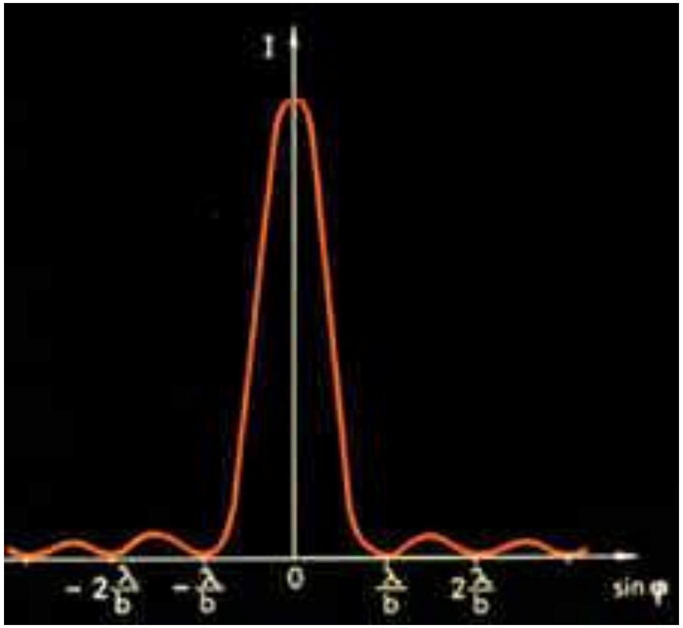


Дифракционная картина симметрична относительно центра линзы $(I_\varphi = I_{-\varphi})$.

Количество минимумов интенсивности определяется отношением ширины щели к длине волны: $b\sin\varphi = \pm m\lambda \Rightarrow \quad \sin\varphi = \pm m\lambda/b; \quad |\sin\varphi| \le 1 \Rightarrow$

$m\lambda/b \le 1 \Rightarrow \quad m \le b/\lambda.$ Если $b < \lambda$, то минимумы не возникают.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ



$$b\sin\varphi_{\min} = \pm m\lambda \Rightarrow \; b\sin\varphi_{\min} = \pm 2m\lambda/2;$$

$$b\sin\varphi_{\max} = \pm(m+1/2)\lambda \Rightarrow b\sin\varphi_{\max} = \pm(2m+1)\lambda/2.$$

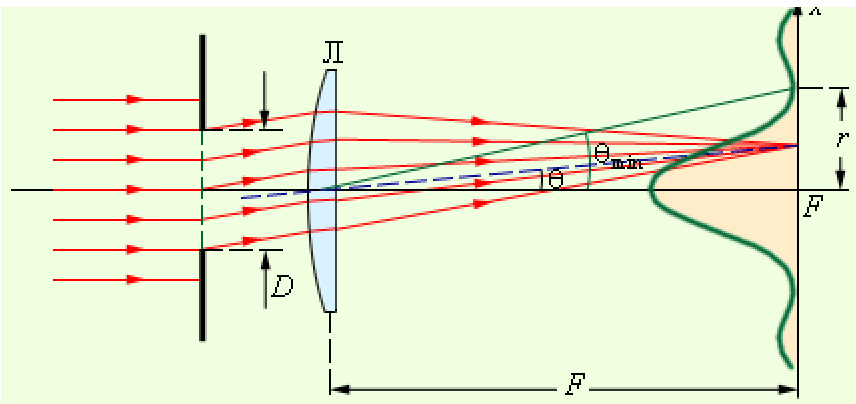
Краям центрального максимума соответствуют значения угла φ_1, получающиеся из условия

$$b\sin\varphi_1 = \pm\lambda \Rightarrow \quad \varphi_1 = \pm\arcsin(\lambda/b).$$

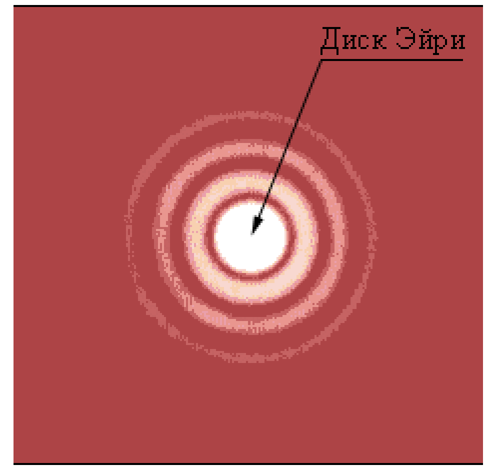
Следовательно, угловая ширина центрального максимума будет равна $\delta\varphi_1 = 2\arcsin(\lambda/b)$.

В случае, когда $b \gg \lambda$, $\sin(\lambda/b) \approx \lambda/b \Rightarrow \delta\varphi_1 \approx 2\lambda/b.$ Если $b < \lambda$, то минимумы не возникают – интенсивность убывает от середины к краям.

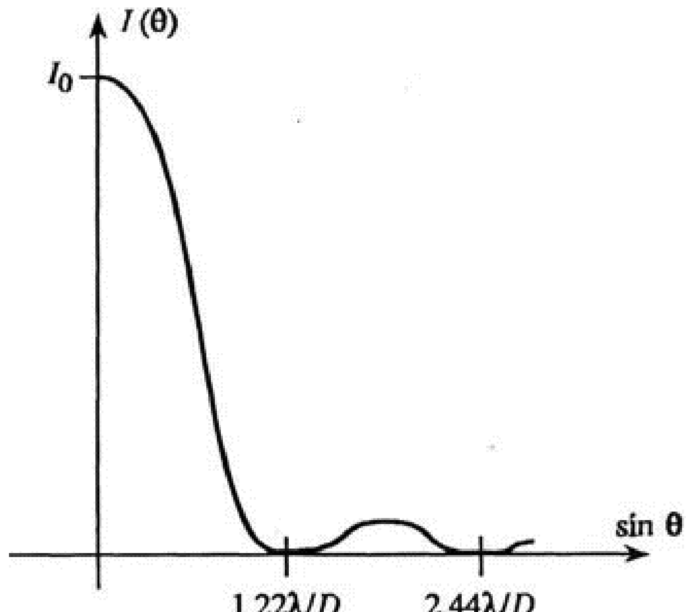
Дифракция на круглом отверстии



$$r = 1{,}22\frac{\lambda}{D}F.$$



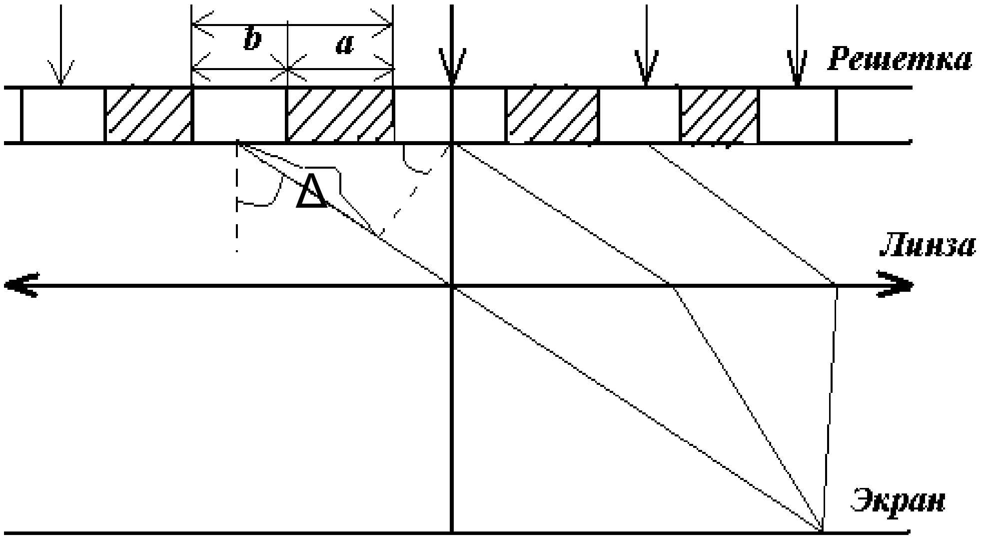
$$I(\theta) = I_0\left[\frac{2J_1\left(\dfrac{kD\sin\theta}{2}\right)}{\dfrac{kD\sin\theta}{2}}\right]^2.$$



Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Дифракционная решетка - спектральный прибор, состоящий из большого числа (**N**) одинаковых щелей (шириной **b**) в непрозрачном экране, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние (**a**).

Величина **d = a + b** называется **периодом решетки**.



- Наблюдаемая при дифракции Фраунгофера на решетке дифракционная картина представляет собой результат суммарной многолучевой интерференции волн от вторичных когерентных источников на каждой щели и на разных щелях.
- Ввиду строго периодического расположения щелей когерентные волны, прошедшие через разные щели, будут интерфирировать между собой и дадут четкую дифракционную картину.
- Разность хода волн, прошедших через соседние щели $\boldsymbol{\Delta = d \cdot \sin\varphi}$, следовательно, разность фаз этих волн $\boldsymbol{\delta = 2\pi\Delta / \lambda = 2\pi d \cdot \sin\varphi / \lambda}$

$$E = A_1 \ell^{i\omega t} + A_1 \ell^{i(\omega t+\delta)} + \ldots + A_1 \ell^{i(\omega t+(N-1)\delta)} =$$

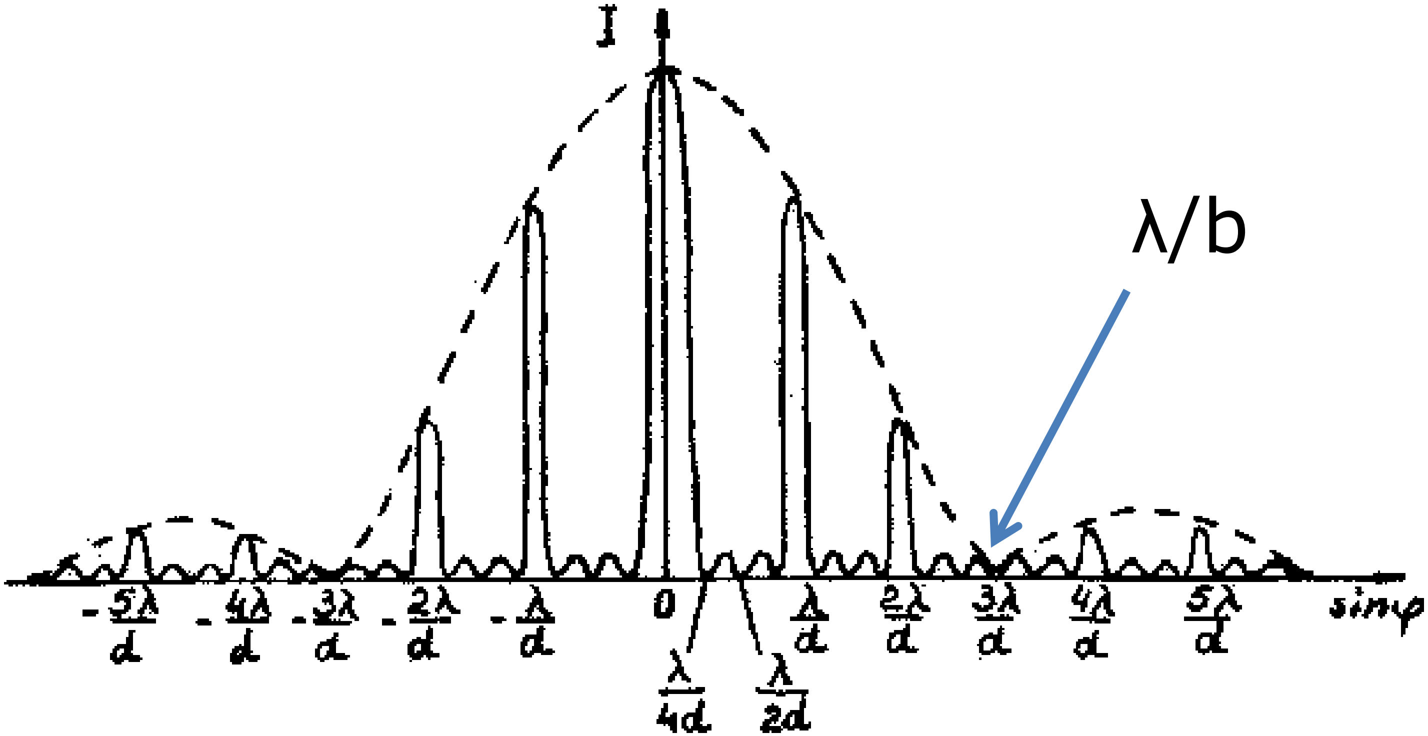
$$= A_1 \ell^{i\omega t} \sum_{m=1}^{N} \ell^{i(m-1)\delta} = A_1 \ell^{i\omega t} \frac{1-\ell^{iN\delta}}{1-\ell^{i\delta}}$$

$$I = E \times E^{*} = A_1^2 \frac{(1-\ell^{iN\delta})(1-\ell^{-iN\delta})}{(1-\ell^{i\delta})(1-\ell^{-i\delta})} = A_1^2 \frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta} =$$

$$= A_1^2 \frac{\sin^2(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin\varphi)}{\sin^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\varphi)}$$

Распределение интенсивности при дифракции на нескольких щелях

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \dfrac{\pi b \sin\varphi}{\lambda}}{\left(\dfrac{\pi b \sin\varphi}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(N \dfrac{\pi d}{\lambda} \sin\varphi\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda} \sin\varphi\right)}$$



- При $\varphi = 0$ в центре картины наблюдается главный максимум нулевого порядка. При $\varphi = 0$ все волны приходят в точку наблюдения в одной фазе. Амплитуда волны $A = NA_0$, где A_0 - амплитуда волны, прошедшей через одну щель. Интенсивность волны $I = N^2 I_0$. Этот результат является следствием интерференции когерентных волн (N некогерентных источников дают интенсивность $I = N I_0$).
- При углах φ, удовлетворяющих условию

$$\boxed{d \cdot \sin\varphi = \pm m\lambda,}$$

разность фаз волн, прошедших через соседние щели,

$$\Delta\varphi = \pm m\lambda \cdot 2\pi/\lambda = \pm 2\pi m,$$

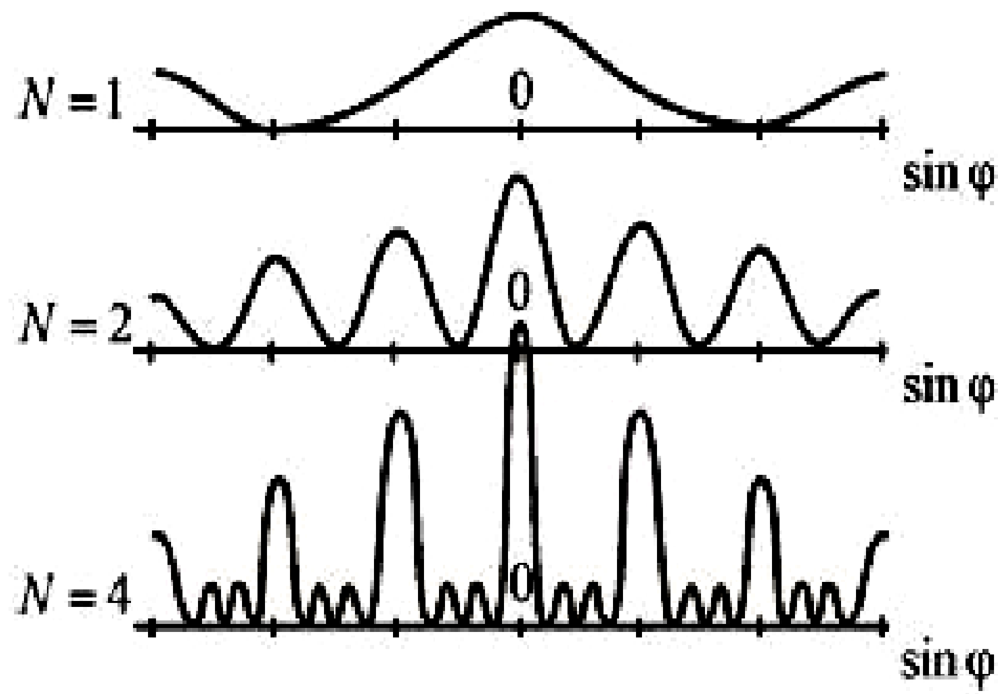
волны приходят в точку наблюдения в одной фазе- **главные максимумы *m*-го порядка.**

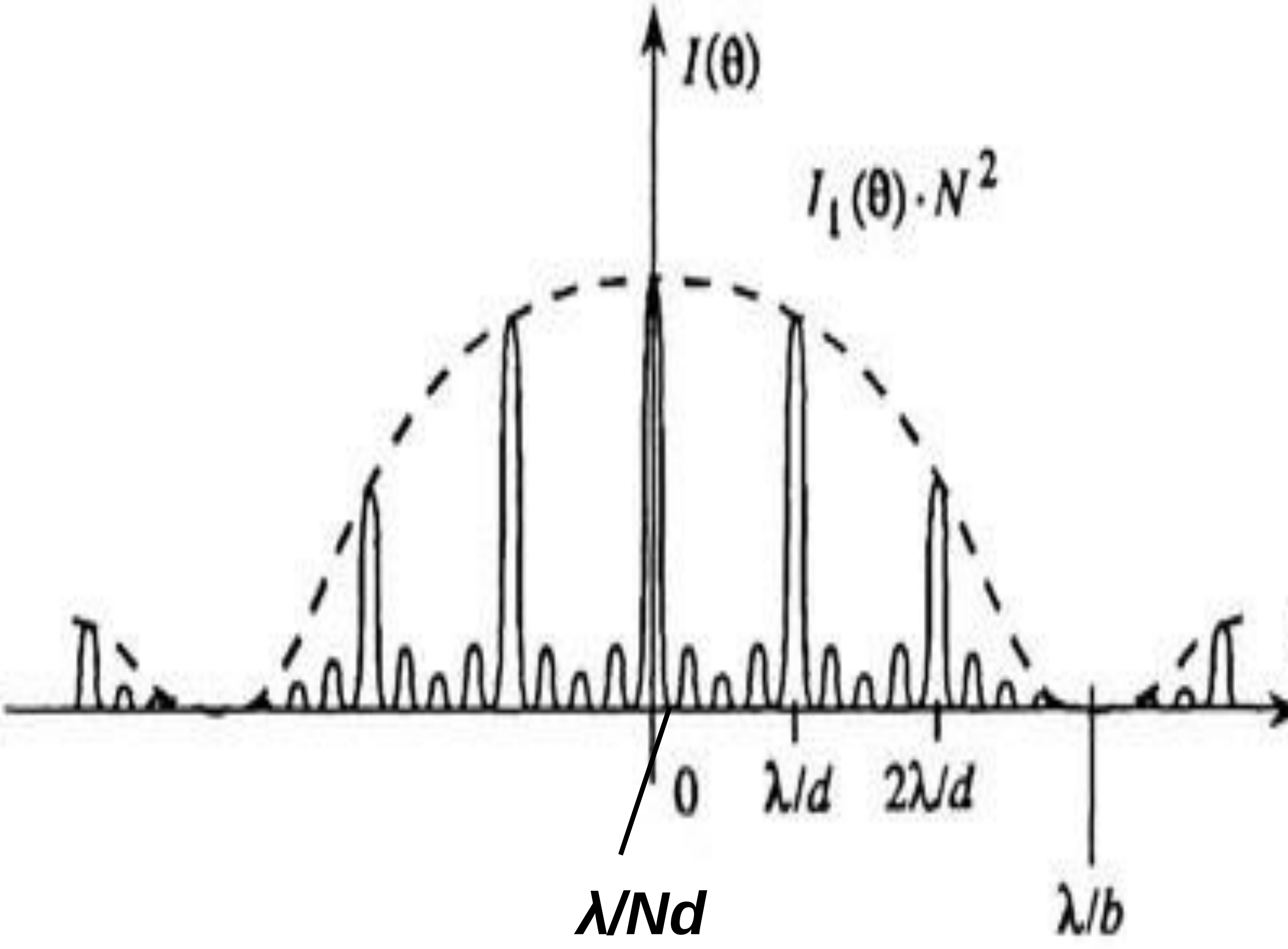
- Между главными максимумами расположены минимумы (N-1) и побочные максимумы. Условия минимумов: $\boxed{d\sin\varphi = \pm (m + k/N)\lambda,}$

где k = 1, 2, 3, ..., N –1

Эти минимумы интерференционные и обусловлены взаимным гашением волн, прошедших через все щели.

- По-прежнему наблюдаются минимумы в направлениях, когда $\boxed{b \sin\varphi = \pm m \lambda.}$





I(θ)
I₁(θ)·N²
θ
0
λ/d
2λ/d
λ/Nd
λ/b

Для дифракционной решетки:

Условие главных максимумов

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda$$

m=0,1,2,..- номер максимума

Условие главных минимумов

$$b\sin\varphi = \pm m\lambda$$

m=1,2,.. – номер (порядок) минимума

Условие доп. минимумов

$$d\sin\phi = \pm(\mathrm{m} + k^{'} / N)\lambda$$

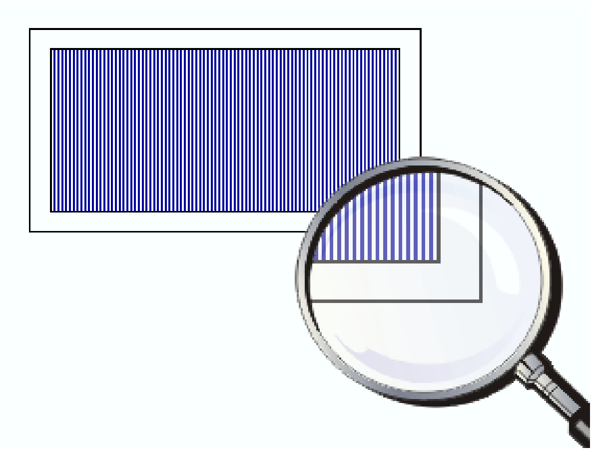
k’- целое число не кратное N $k^{'} \neq 2mN$

- Дифракционная картина выражена тем резче, чем больше число щелей N. Действительно, **угловая ширина центрального максимума** определяется условием первого минимума (4):

$$\Delta\varphi = 2\arcsin(\lambda/Nd),$$

что **в $Nd/b \approx N$ раз меньше, чем при дифракции на одной щели.**

- Положение всех главных максимумов, кроме нулевого, зависит от длины волны. Поэтому главные максимумы различных длин волн будут разделены на экране; таким образом, **дифракционная решетка будет производить разложение немонохроматического излучения на спектральные составляющие.**



- На **стеклянных** решетках наблюдения можно производить как в проходящем, так и в отраженном свете, на **металлических** - только в отраженном.
- Наиболее типичные дифракционные решетки, которые используются для работы в видимом диапазоне спектра (390 - 780 нм) имеют от 300 до 1600 штрихов/мм.

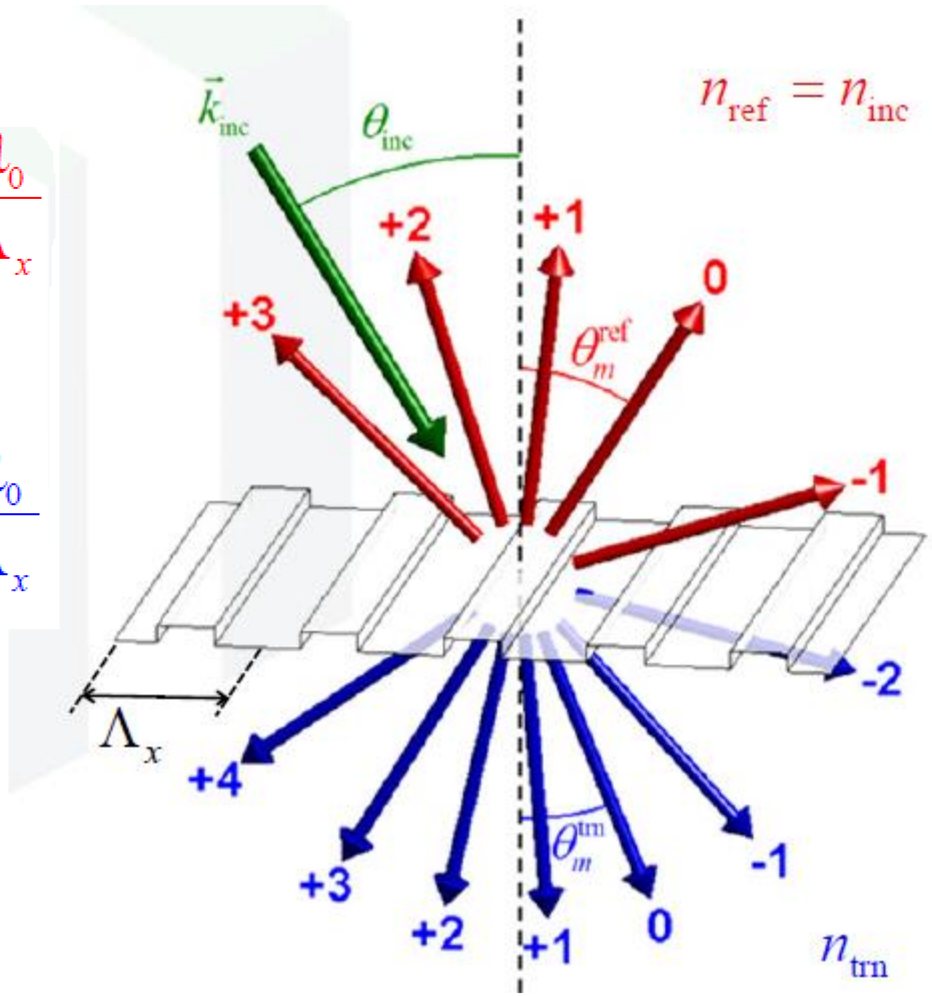
Уравнение дифракционной решетки

Reflection Region

$$n_{\text{ref}} \sin\left[\theta(m)\right] = n_{\text{inc}} \sin\theta_{\text{inc}} - m\frac{\lambda_0}{\Lambda_x}$$

Transmission Region

$$n_{\text{trn}} \sin\left[\theta(m)\right] = n_{\text{inc}} \sin\theta_{\text{inc}} - m\frac{\lambda_0}{\Lambda_x}$$

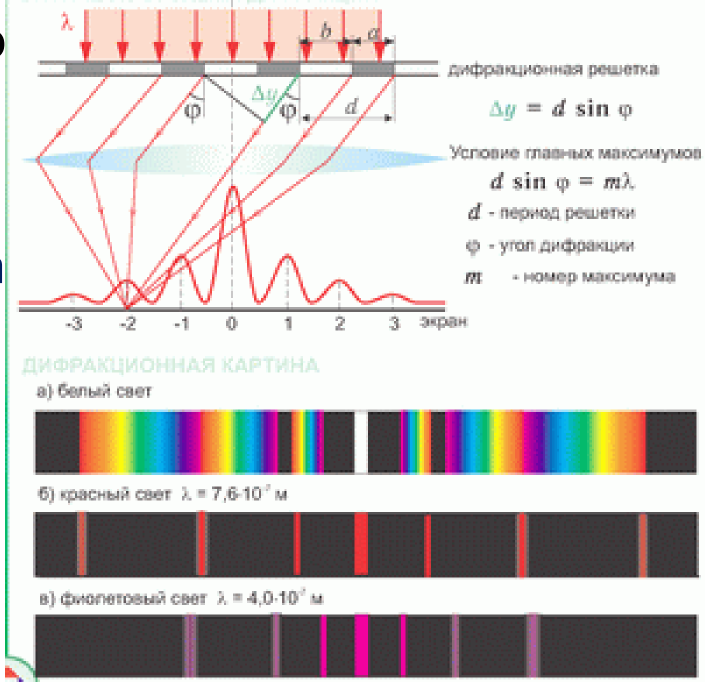


ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА КАК СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПРИБОР

Положение главных максимумов зависит от длины волны: $d\sin\varphi = \pm m\lambda.$ Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, будут разложены в спектр. Фиолетовый фланг этого спектра обращен к центру дифракционной картины, а красный – наружу.

В центре лежит узкий нулевой максимум; у него окрашены только края, так как ширина центрального максимума $\delta\varphi_0$ зависит от λ.

По обе стороны от центрального максимума расположены два спектра 1-го порядка, затем два спектра 2-го порядка и т. д.



Положение красного конца спектра порядка m и фиолетового порядка $m+1$ будет

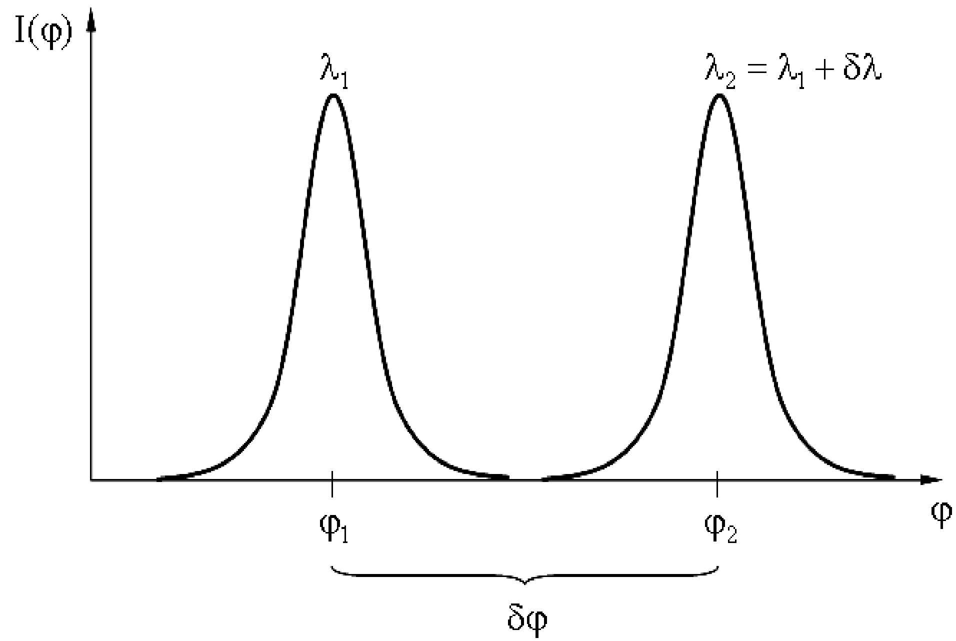
$$d\sin\varphi_к = m\lambda_к; \quad d\sin\varphi_ф = (m+1)\lambda_ф;$$

$$\varphi_к(m) > \varphi_ф(m+1) \Rightarrow m\lambda_к > (m+1)\lambda_ф \Rightarrow m > 10/9.$$

- Дисперсия - угловое (или линейное) расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу (например, на 1 мкм).
- **Угловая дисперсия**

$$\boxed{D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} \approx \frac{m}{d}}$$

- **Линейная дисперсия** (расстояние на экране) $D = D_\varphi F$, где F – фокусное расстояние линзы.

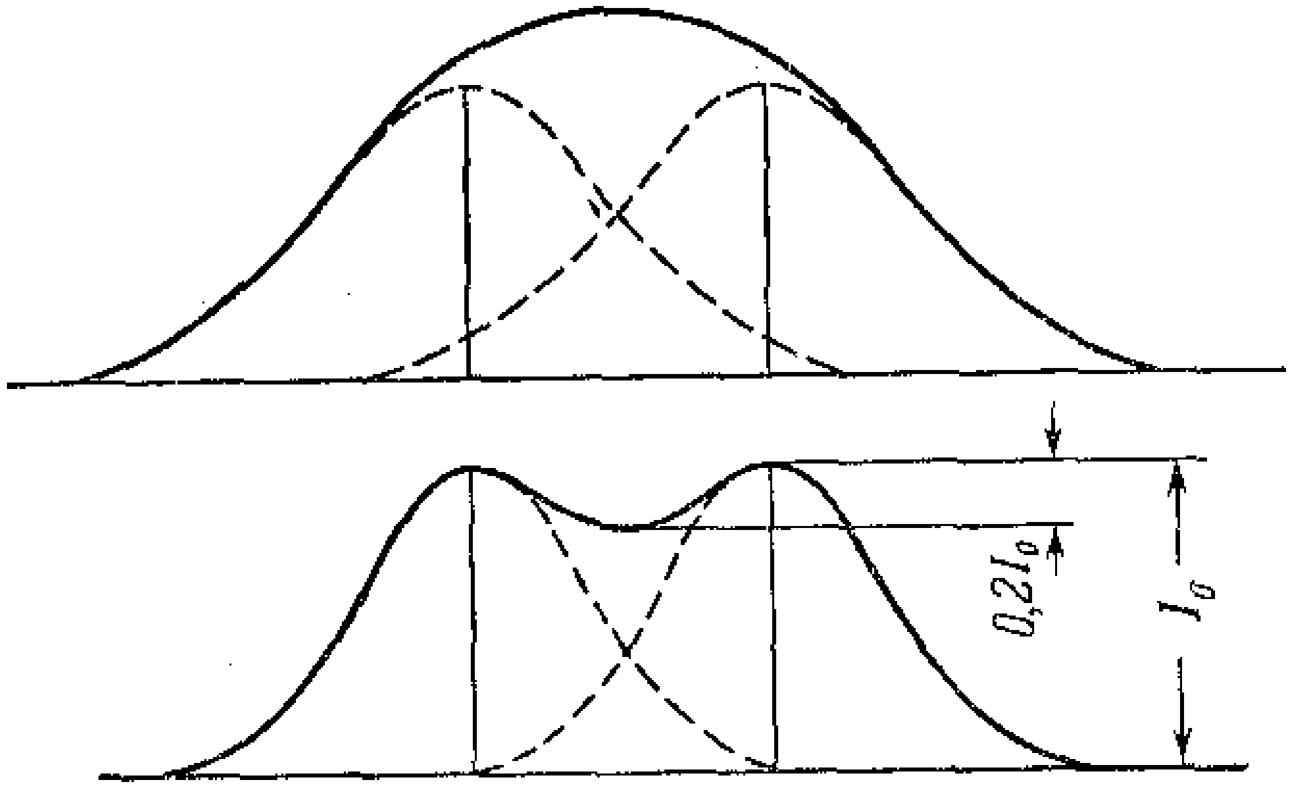


- **Разрешающая сила** определяется минимальной разностью длин волн, при которой две линии в спектре воспринимаются раздельно.

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}}$$

- Согласно **критерию Рэлея** две линии в спектре воспринимаются раздельно (считаются разрешенными), если дифракционный максимум первой линии совпадает (или лежит дальше) с минимумом второй линии.

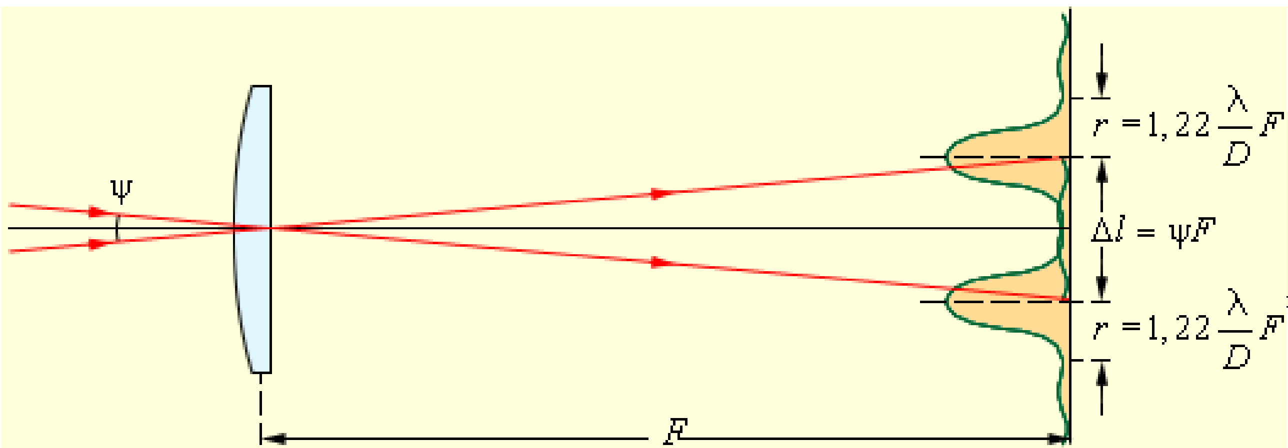
КРИТЕРИЙ РЭЛЕЯ

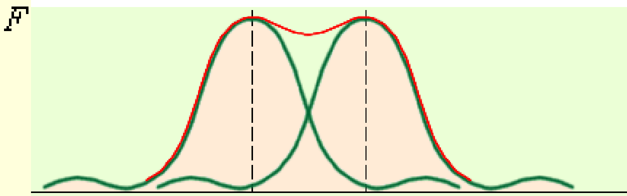


Минимум интенсивности одной линии должен совпадать с максимумом другой.

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ

Критерий Рэлея





$$\Delta l_{min} = \psi_{min} \cdot F = 1{,}22\frac{\lambda}{D}F \quad \text{или} \quad \psi_{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}.$$

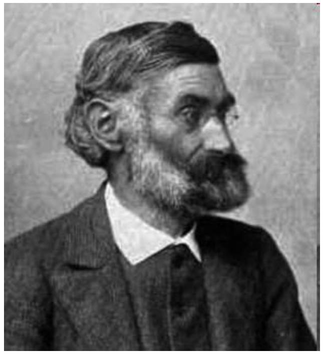
Разрешающая способность глаза

d = 3 мм →

θmin = 1,22 λ/d = 2,3 10-4 рад ≈ 1’

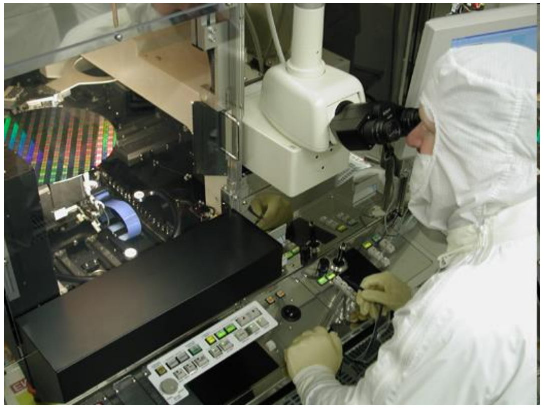
Дифракционный предел

Минимально возможный размер светового пятна,
которое можно получить, фокусируя свет заданной длины волны
в среде с показателем преломления n:

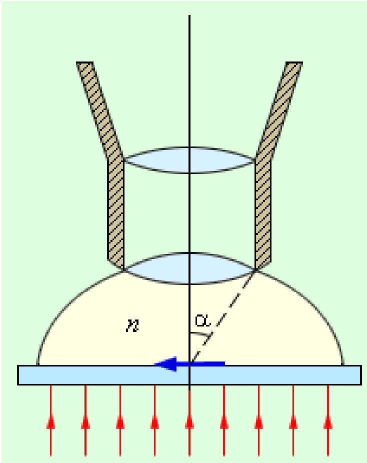


Эрнст Аббе 1873

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n}.$$



Для микроскопа



$$l_{\min} = \frac{0{,}61\lambda}{n \sin \alpha}.$$