Колебания и волны

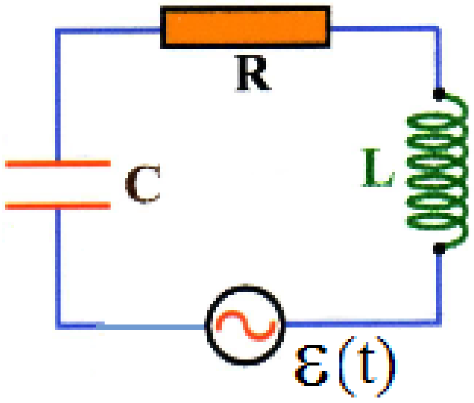
Лекция 8

Вынужденные колебания

-Происходят под действием **внешней**, периодически меняющейся со временем **силы**. Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо **компенсировать потери энергии**.
В колебательном контуре, например, такая компенсация осуществляется с помощью источника переменного тока.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение

Получим это уравнение на примере колебательного контура, подключенного к переменной ЭДС.



$$\varepsilon(t)+\varepsilon_s=U_C+U_R$$

$$\varepsilon(t)-L\frac{dI}{dt}=IR+\frac{Q}{C}\Bigg|\times\frac{1}{L}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{LC}Q=\frac{\varepsilon(t)}{L}$$

$$\frac{\varepsilon(t)}{L} = f(t)$$ - некая периодическая функция времени. Пусть, например, она меняется по гармоническому закону:

$$f(t) = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\Omega t = f_0 \cos\Omega t$$

Общий вид дифференциального уравнения вынужденных колебаний любой природы:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)}$$

Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону с частотой Ω уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t \qquad (1)$$

(1) – линейное (при постоянных коэффициентах) неоднородное уравнение 2-го порядка. Общее решение такого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения + любое частное решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_{од}(t) + x_{н}(t)$$

Рассмотрим случай не очень быстрого затухания собственных колебаний, когда $\beta \prec \omega_0$

Тогда $x_{од}(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$,

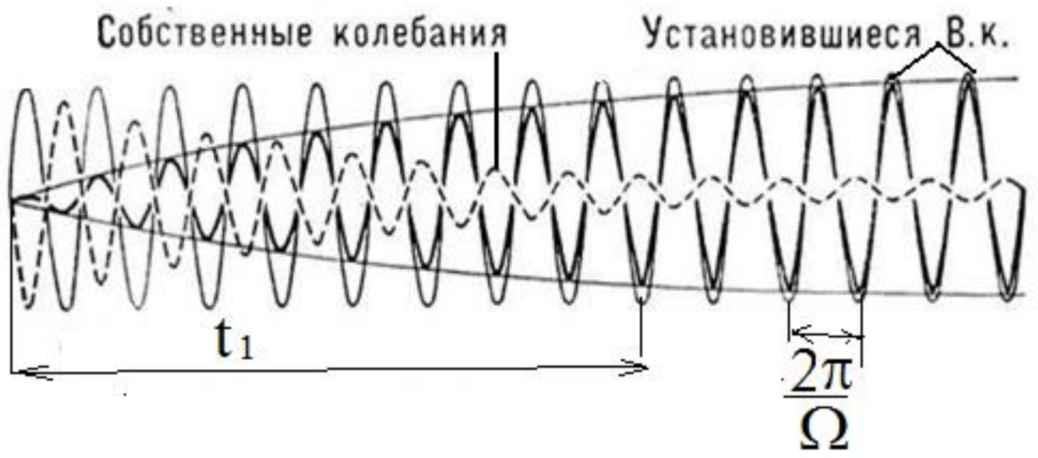
а $x_н(t)$ соответствует незатухающим колебаниям с частотой вынуждающей силы:

$$x_н(t) = A\cos(\Omega t - \varphi), \quad (2)$$

Где А – амплитуда, φ величина отставания по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы.

После приложения периодически действующей силы к колебательной системе вначале возникает **переходный процесс**: со временем собственные колебания в системе затухают и остаются только колебания вида (2):

$$x(t)\big|_{t \succ t_1} = A\cos(\Omega t - \varphi) \quad (3)$$



$$x(t)\Big|_{t \succ t_1} = A\cos(\Omega t - \varphi) \qquad (3)$$

Определим A и φ , потребовав, чтобы x(t) удовлетворял (1).

$$\frac{dx}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = A\Omega \cos(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi) = A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) \qquad (5)$$

(3), (4), (5)⇨ (1):

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\Omega \cos(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t - \varphi) =$$

$$= f_0 \cos \Omega t.$$

Последнее уравнение должно выполняться в любой момент времени.
Для t=0:

$$A\Omega^2 \cos(\pi - \varphi) + 2\beta A\Omega \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + A\omega_0^2 \cos(-\varphi) = f_0$$

Т.к. $\cos(\pi - \varphi) = \cos(-\varphi)$, то

$$A(\omega_o^2-\Omega^2)\cos(-\varphi)+2\beta A\Omega\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=f_0$$

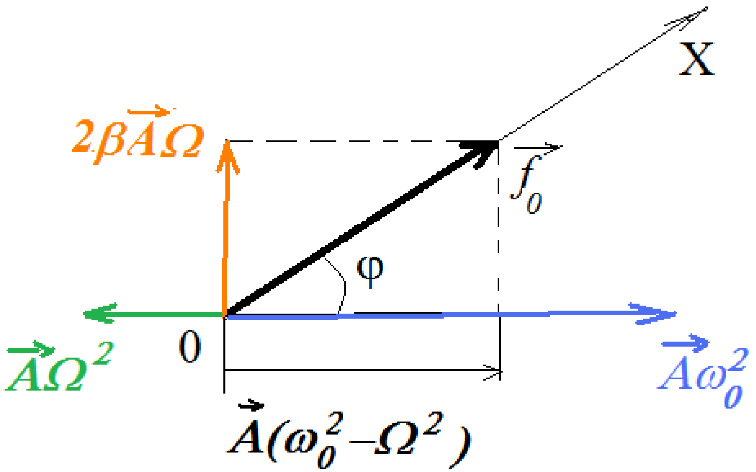
$$A(\omega_o^2-\Omega^2)\cos\varphi+2\beta A\Omega\sin\varphi=f_0 \qquad (6)$$

Далее используем метод векторных диаграмм. Рассмотрим векторное уравнение

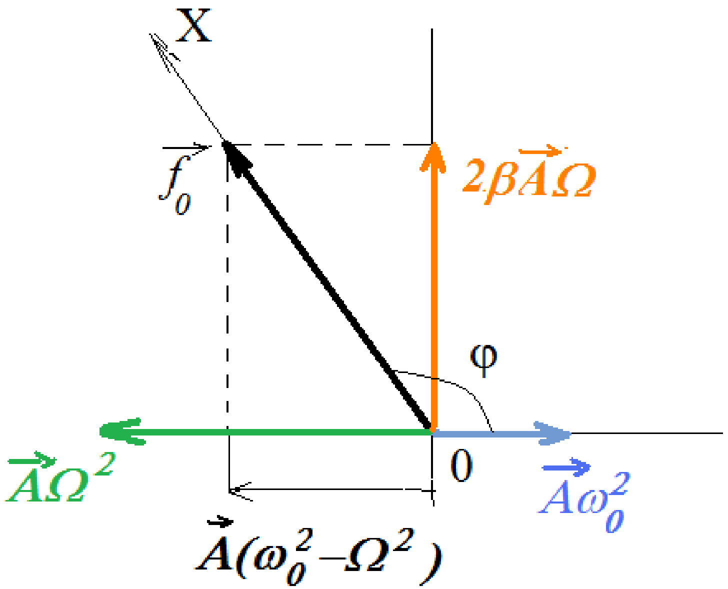
$$\vec{f}_0=\vec{A}(\omega_0^2-\Omega^2)+2\beta\vec{A}\Omega$$

Выражение (6) – проекция на ось *OX* векторного уравнения (см. рис.)

а) $\omega_0 \succ \Omega$



б) $\omega_0 \prec \Omega$



Из прямоугольного треугольника $f_0^{\,2} = A^2\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2\Omega^2\right]$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \qquad (7)$$

$$tg\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \qquad (8)$$

Т.о. А и φ зависят от соотношения Ω и ω_0, хотя вынужденные колебания происходят при частоте вынуждающей силы.

Если нет затухания, т.е. $\beta = 0$, то $\varphi = 0$ - нет отставания по фазе колеблющейся величины X от вынуждающей силы.

Резонанс

Амплитуда вынужденных колебаний определяется выражением $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что

при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда достигает максимального значения.

Это явление называется резонансом, а соответствующая частота - резонансной.

Рассмотрим ситуацию:

а) $\omega_0, \beta = const$, меняется Ω .

Резонансную частоту Ω_p определим из условия максимального значения амплитуды или минимального значения для подкоренного выражения в знаменателе. Продифференцировав это выражение по Ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее резонансную частоту:

$$\frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2\right]=0$$

$$2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\beta^2\Omega=0$$

$$\omega_0^2-\Omega^2=2\beta^2 \qquad \Omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

$$\boxed{\Omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

- частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна.

$$A_{\max}=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega_p{}^2)^2+4\beta^2\Omega_p{}^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}}$$

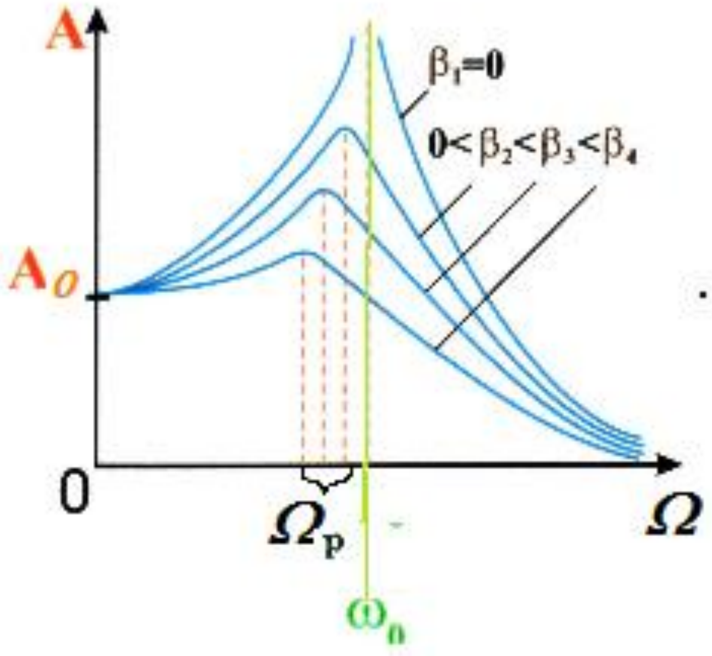
$$A_{\max}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{f_0}{2\beta\omega}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\boxed{\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

$$A_{max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Исследуем зависимость $A(\Omega)$:



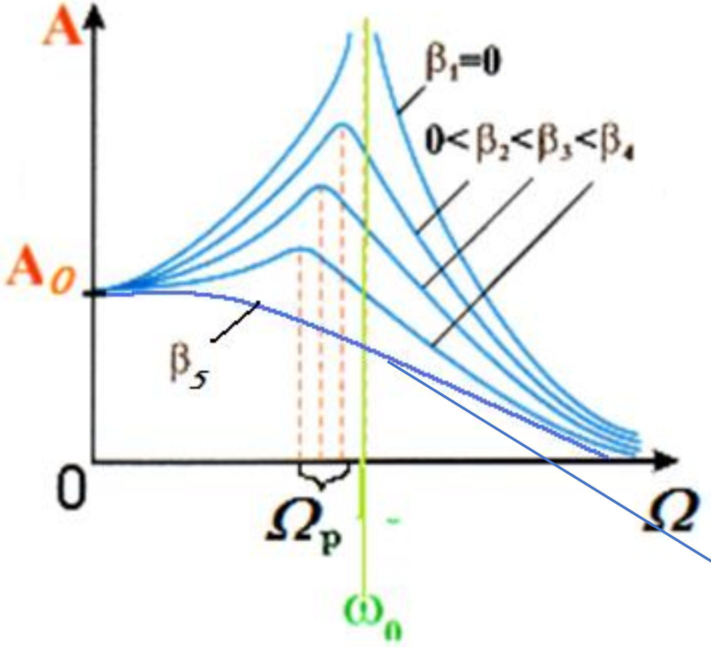
1) $\Omega = 0: A = A_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$ - статическое смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы f_0 .

2) $\Omega \to \infty: A \to 0.$

3) Изменяем β :

$$\beta = 0, \Omega_p = \omega_{0,} A_{max} = \infty$$

$$\beta \neq 0, \beta \uparrow, \Omega_p \downarrow, A_{max} \downarrow.$$



Т.о. с ростом коэффициента затухания уменьшается рост амплитуды при резонансе, а резонансная частота смещается влево по оси частот.

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

При $\Omega_p \le 0, \beta \ge \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ резонанса

амплитуд не наблюдается.

При малом затухании

$$A_{\max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

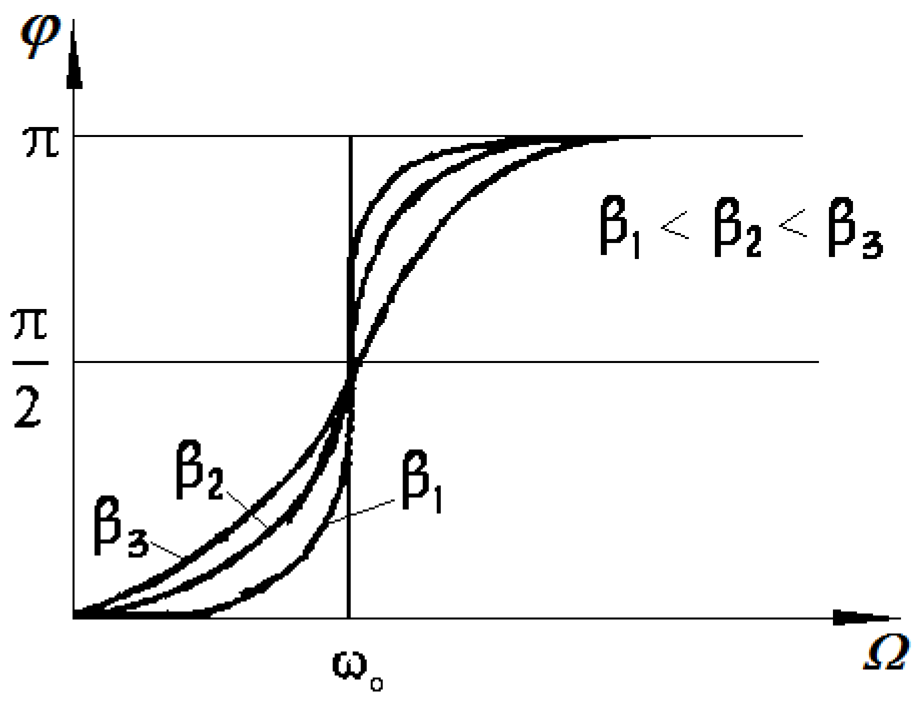
$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T_0} = \frac{\pi}{\delta} = Q$$

добротность системы при малом затухании - отношение амплитуды в резонансе к статическому смещению .

$$tg\varphi = \frac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (8)$$

Изобразим фазовые резонансные кривые $\varphi(\Omega)$



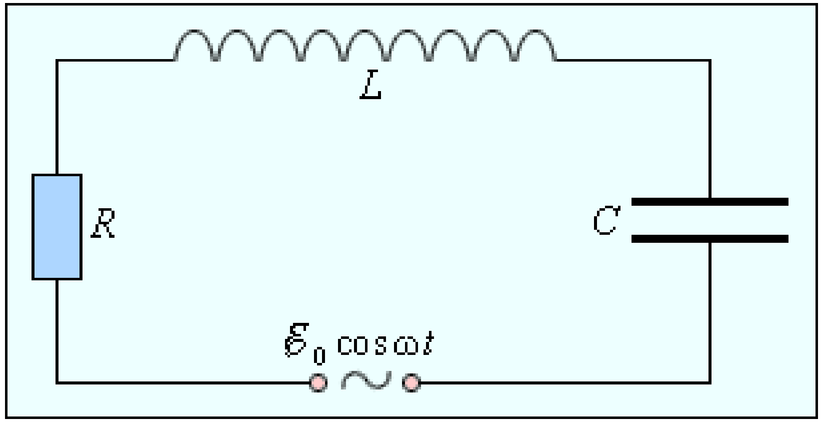
$$\Omega = 0 : tg\varphi = 0, \varphi = 0$$

$$\Omega = \omega_0 : tg\varphi = \infty, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Omega \to \infty : tg\varphi \to 0, \varphi \to \pi$$

Вынужденные электрические колебания

$$U_L + U_R + U_C = U_m \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t$$



$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos \omega t}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \beta = \frac{R}{2L}$$

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$q_m = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Электрический импеданс (полное сопротивление цепи переменного тока)

$$I_m = q_m \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}}$$

Электрический импеданс

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

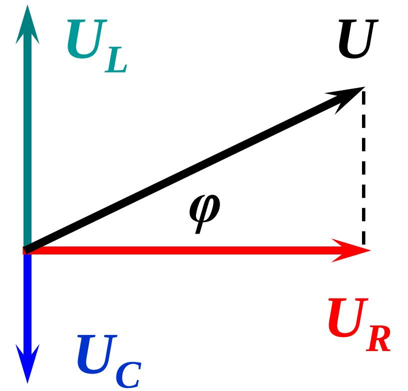
$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}}$$ – полное сопротивление

$X = (\omega L - 1/\omega C) = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление

$X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление

$X_C = 1/\omega C$ – емкостное сопротивление

$$I_R = I_m \cos \omega t$$



$$\begin{cases} U_R = IR = I_m R \cos \omega t = U_{Rm} \cos \omega t \\ U_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_m}{C} \sin \omega t = U_{Cm} \cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2}) \\ U_L = L\dfrac{dI}{dt} = -LI_m \sin \omega t = U_{Lm} \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

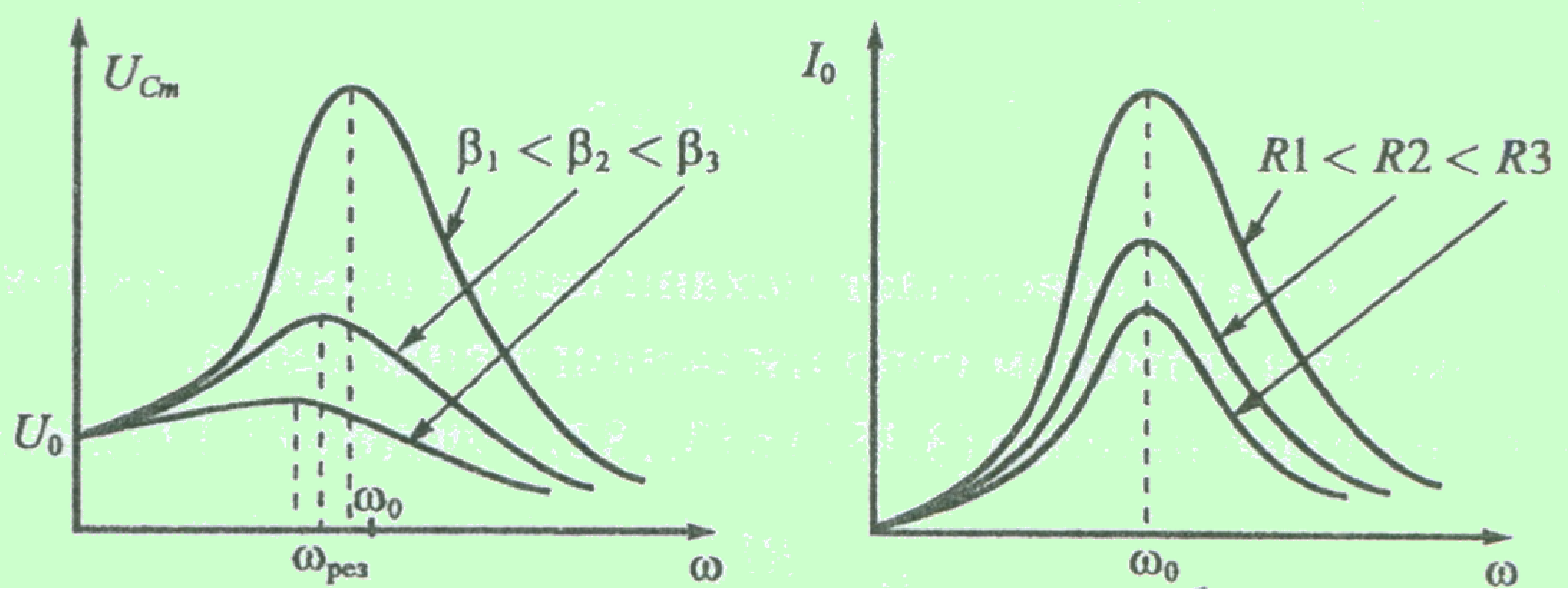
Резонанс напряжений

Сопротивление минимально, а ток максимален, если

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

$$(\omega L - 1/\omega C) = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0}$$

Резонанс в последовательном колебательном контуре называют резонансом напряжений, поскольку в нем происходит полная компенсация напряжений на емкости и индуктивности, каждое из которых порознь, тем не менее, может существенно превышать приложенное к цепи напряжение.



Автоколебания

Автоколебательная система

Колебательная система, **совершающая незатухающие колебания за счет действия источника энергии, не обладающего колебательными свойствами (периодичностью)**

***Примеры*:** **часы, орган, духовые инструменты, паровые машины и двигатели внутреннего сгорания**

В системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии

⇨ **тем самым поддерживаются собственные колебания, которые не затухают**

⇨ **система** как бы **сама себя подталкивает**

Схема автоколебательной системы

В состав любой автоколебательной системы входят:

1. **Колебательная система**
2. **Источник энергии** — **компенсирует потери на преодоление сопротивления**
3. **Клапан** — **устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему определенными порциями и в определенный промежуток времени**
4. **Обратная связь** — **устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему определенными порциями и в определенный промежуток времени**

Пример автоколебательной системы

Часы с анкерным ходом

Колебательная система
маятник

Источник энергии
поднятая гиря

Клапан
анкер

Обратная связь
взаимодействие анкера с ходовым колесом