Колебания и волны

Лекция 7

Свободные затухающие колебания

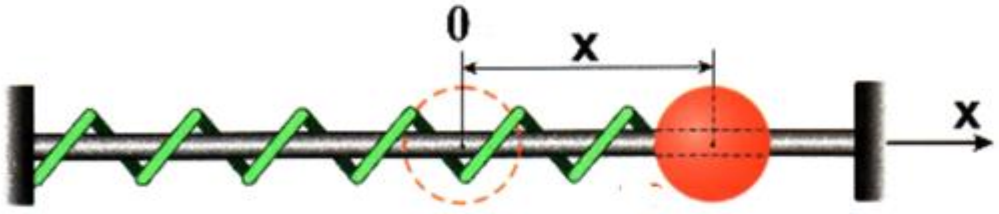
-это колебания, происходящие под действием внутренних сил системы; при этом **амплитуда** колебаний со временем **уменьшается из-за потерь энергии** реальной колебательной системой.

-В механических системах колебания затухают из-за взаимного трения частей системы или сопротивления среды; в колебательном контуре – из-за выделения джоулева тепла или излучения электромагнитной энергии.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

Получим это уравнение на примере **пружинного маятника**. При небольших скоростях движения тела сила сопротивления

$$F_c = -r\upsilon = -r\dot{x}$$

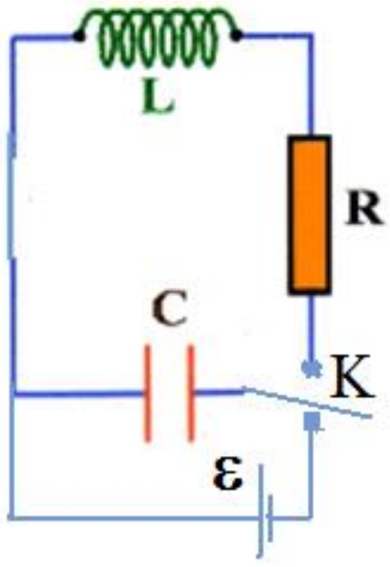


$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_c$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \frac{r}{m} = 2\beta, \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (**)$$



Для реального колебательного контура ($R \neq 0$)

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad (*)$$

Введя обозначения $Q = x, \frac{R}{L} = 2\beta, \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow$ (*)

Получим (**): $$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ - общий вид диф. уравнения свободных затухающих колебаний любой природы.

Это однородное линейное (при постоянных коэффициентах) дифуравнение 2-го порядка.
Решение уравнения различно в зависимости от соотношения между коэффициентами. Рассмотрим 2 случая - $\beta \prec \omega_0$ и $\beta \succ \omega_0$.

1) **При небольшом затухании** $\beta \prec \omega_0$

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

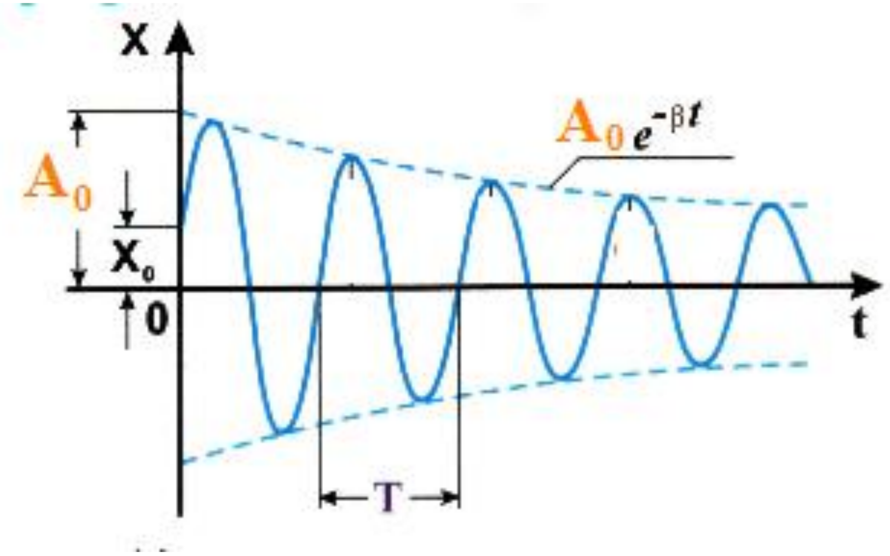
, где начальная амплитуда и начальная фаза A_0, φ_o определяются из начальных условий: $x(0), \dot{x}(0)$.

Частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



С ростом затухания период колебаний растет.

$$\beta \to \omega_0, \omega \to 0, T \to \infty.$$

Амплитуда

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

2) **При большом затухании** $\beta \succ \omega_0$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

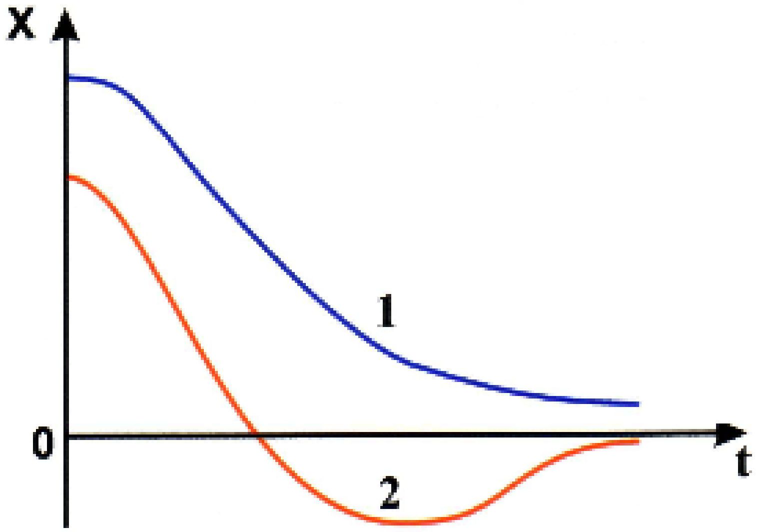
, где C_1, C_2 вещественные постоянные, которые определяются начальными условиями.

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{\prec \beta} \prec 0$$

, т.е. *X* с течением времени убывает.

При этом система совершает **апериодическое движение** – возвращение выведенной из состояния равновесия системы обратно происходит без колебаний двумя способами.

1 –систему вывели из состояния равновесия и отпустили без толчка.



2 – вывели из состояния равновесия и сообщили сильный толчок к положению равновесия.

Условие, при котором затухающие колебания переходят в апериодический процесс:

$$\boxed{\beta = \omega_0}$$

Для колебательного контура:

$$\frac{R_{кр}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

-критическое сопротивление, при котором прекращаются колебания в контуре.

В механической системе с диссипативными силами:

$$\frac{r_{кр}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}, r_{кр} = 2\sqrt{km}$$

Общие характеристики колебательной системы с затуханием

1. **Коэффициент затухания β . Время релаксации τ.**

Рассмотрим промежуток времени

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Отношение двух амплитуд, отстоящих друг от друга на этот промежуток времени

$$\frac{A(t+\tau)}{A(t)} = \frac{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{-\beta\tau} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad A(t+\tau) = \frac{A(t)}{e}$$

Коэффициент затухания обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в е раз.

Промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в **е** раз, называется временем релаксации колебаний.

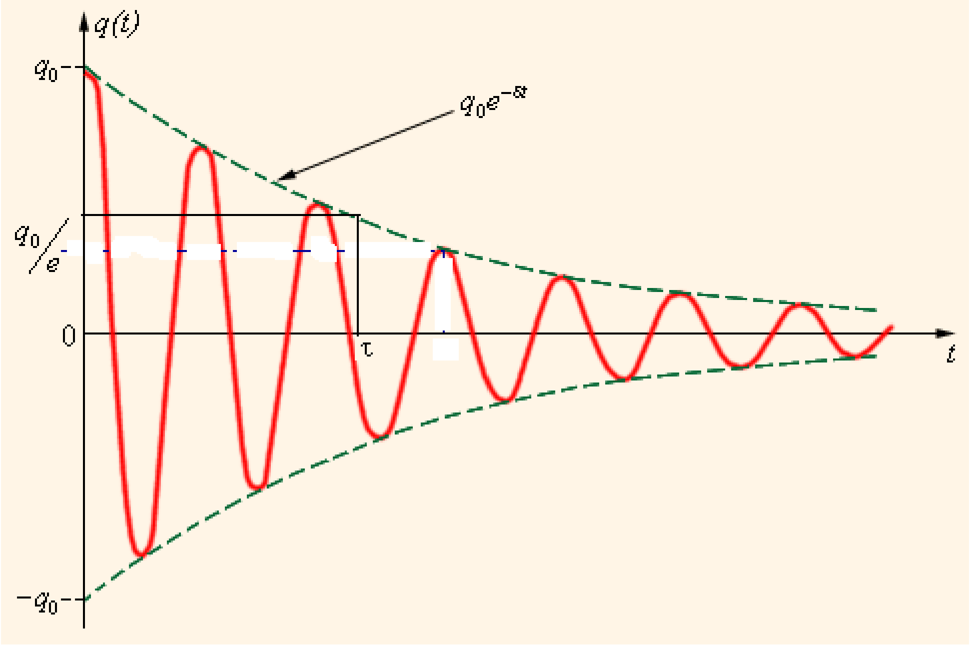
2. Логарифмический декремент затухания λ.

Отношение амплитуд, соответствующих моментам времени, различающимся на период, называют декрементом затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = e^{+\beta T}$$

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \left(\frac{\tau}{T}\right)^{-1} = \frac{1}{N_e}$$



, где N_e - число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в **e** раз.

Логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в е раз.

3. Добротность колебательной системы Q.

Добротность характеризует потери энергии в колебательной системе

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}} \qquad (1)$$

Она равна произведению 2π на отношение энергии, запасенной в системе в произвольный момент времени, к убыли этой энергии за один период колебаний.

Рассмотрим колебательный контур с малым затуханием.

$$Q(t) = Q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Когда вся энергия сосредоточена в конденсаторе, полная энергия колебаний

$$\left.\begin{aligned} E(t) &= \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2 e^{-2\beta t}}{2C} \\ E(t+T) &= \frac{Q_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2C} \end{aligned}\right\} \quad \frac{E(t+T)}{E(t)} = e^{-2\beta T} \Rightarrow (1)$$

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - \frac{E(t+T)}{E(t)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \qquad (2)$$

При малом затухании колебаний $\beta \ll \omega_0$

$$\beta T = \frac{\beta 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1}}_{\gg 1}} \ll 1$$

$$e^{-x}\Big|_{x \ll 1} \approx 1 - x \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\beta T)} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e \qquad \boxed{Q = \pi N_e}$$

Добротность системы с малым затуханием пропорциональна числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в **е** раз.

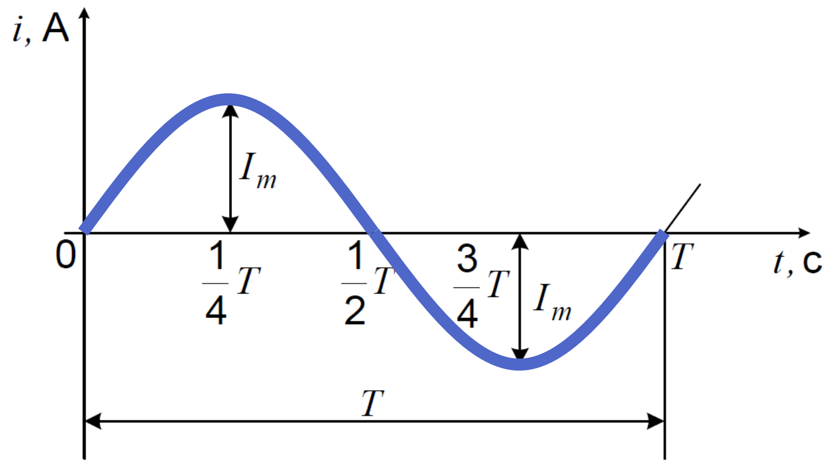
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В электротехнике переменный ток применяется более широко, чем постоянный. Это связано с возможностью легко преобразовать его для передачи на расстояние и потребления в народном хозяйстве.

Переменным током называют ток, который **изменяется во времени по величине и направлению**. Чаще всего переменный ток в электротехнике может быть однофазным и трёхфазным.

Переменный однофазный синусоидальный ток

В технике широко используются процессы, изменяющиеся по периодическому закону. Однофазный синусоидальный ток представляет собой переменный ток, изменяющийся во времени по периодическому, синусоидальному закону (который, также, называют гармоническим законом). Его график представлен в виде колебательного процесса на рис.



Таким образом, любая синусоидально (гармонически) изменяющаяся функция однозначно определяется тремя величинами: амплитудой, угловой частотой (частотой, периодом) и начальной фазой.

Амплитуда **Угловая частота**

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Начальная фаза

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Действующее значение синусоидально изменяющейся величины переменного тока и напряжения

Кроме понятий мгновенного и максимального значений тока и напряжения, существует понятие их действующего значения.

Например, действующее значение I синусоидального тока $i = I_m \sin(\omega t)$ численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет на сопротивлении R такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток.

Действующее значение тока ещё называют эффективным или среднеквадратичным. Его определяют из выражения:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2 \omega t \, d\omega t} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m .$$

Аналогично определяют действующее значение напряжения:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, U_m .$$

Среднее значение синусоидально изменяющейся величины переменного тока и напряжения

Под средним значением синусоидального переменного тока понимают его среднее значение за ***полпериода***, и определяют из выражения:

$$I_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \omega t \, d\omega t = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}638 I_m \; .$$

Аналогично определяется среднее значение переменного напряжения:

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m = 0{,}638 \, U_m .$$

Коэффициенты амплитуды и формы

Коэффициент амплитуды представляет собой отношение амплитуды периодически изменяющейся функции к её действующему значению.

Так, для синусоидального тока:

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1{,}41.$$

Коэффициент формы – это отношение действующего значения периодически изменяющейся функции к её среднему значению за полпериода.

Так, для синусоидального тока:

$$K_ф = \frac{I}{I_{ср}} = \frac{\dfrac{I_m}{\sqrt{2}}}{\dfrac{2I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11.$$

Коэффициенты амплитуды K_a и формы $K_ф$ для несинусоидальных периодических токов и напряжений будут не равны своим значениям для синусоидальной функции.

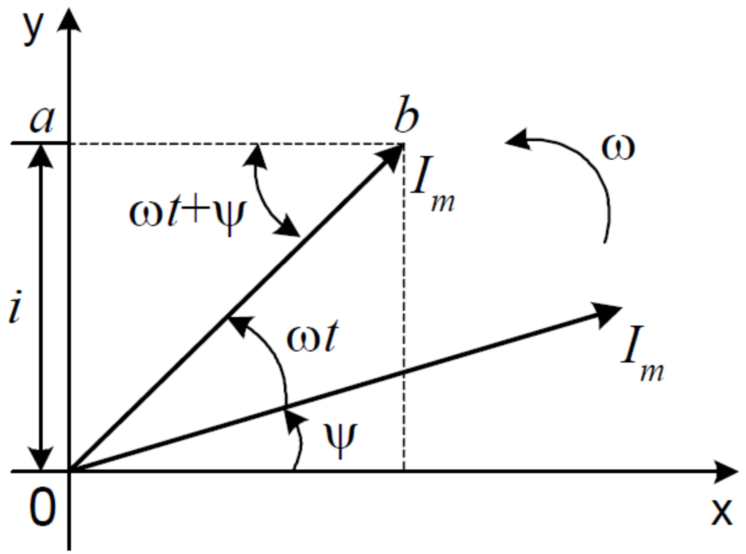
Отличие K_a от 1,41 и $K_ф$ от 1,11 позволяет судить о том, насколько несинусоидальный ток или напряжение отличается (искажается) от синусоидального.

Представление переменного синусоидального тока вращающимся вектором. Векторные диаграммы

Пусть в прямоугольной системе координат x и y имеется вектор длиной I_m, расположенный под углом ψ к горизонтальной оси (рис. 4.1).

Заставим этот вектор вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Тогда за время t он повернётся на угол ωt .

Проекцию вращающегося вектора на вертикальную ось обозначим через функцию $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. Функция i представляет собой мгновенное значение тока.



Изображение тока с помощью вектора называется его ***векторной диаграммой***.

Длина вектора может быть равна амплитудному значению I_m, либо действительному значению I. Обычно вектор при этом показывается не в произвольный момент времени t , а в начальный, когда t = 0, т. е. угол наклона вектора к горизонтальной оси равен начальной фазе.

Построим векторную диаграмму двух векторов – тока и напряжения, представленную на рис. Длины векторов равны действующим значениям тока и напряжения, углы их наклона к горизонтальной оси – начальным фазам, а угол между векторами, равный разности начальных фаз ψ_u и ψ_i, определяет сдвиг фаз φ между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

На диаграмме стрелка, показывающая угол φ, всегда изображается в положительном направлении – против часовой стрелки.

Векторная диаграмма даёт наглядное представление об отставании одних величин и опережении других.

Если начальные фазы *U* и *I* (ψ_u и ψ_i) равны нулю, то можно изображать векторную диаграмму без осей и располагать её как удобно.

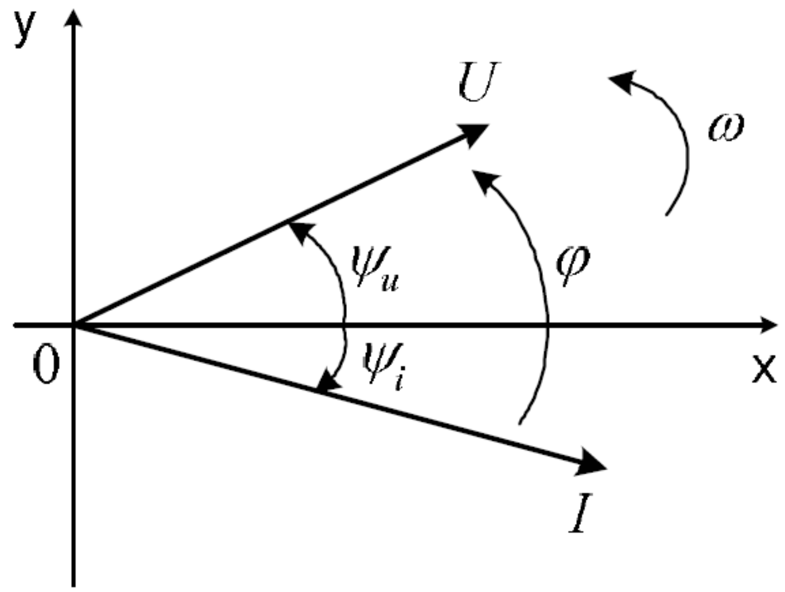


Рис. Векторная диаграмма напряжения и тока

ЗАКОНЫ КИРХГОФА В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА И МЕТОДЫ РАСЧЁТА ЭТИХ ЦЕПЕЙ

Для мгновенных значений ЭДС, токов и напряжений остаются справедливыми сформулированные ранее законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа: в любой момент времени алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0, \qquad (1)$$

где n – число ветвей, сходящихся в узле.

Второй закон Кирхгофа: в любой момент времени в замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме напряжений на всех остальных элементах контура

$$\sum_{k=1}^{m} e_k(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t), \qquad (2)$$

где m – число ветвей, образующих контур.

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0, \quad (1) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{m} e_k(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t), \quad (2)$$

Токи, напряжения и ЭДС, входящие в уравнения (1) и (2), есть синусоидальные функции времени, которые рассматриваются как проекции определённых векторов на оси координат.

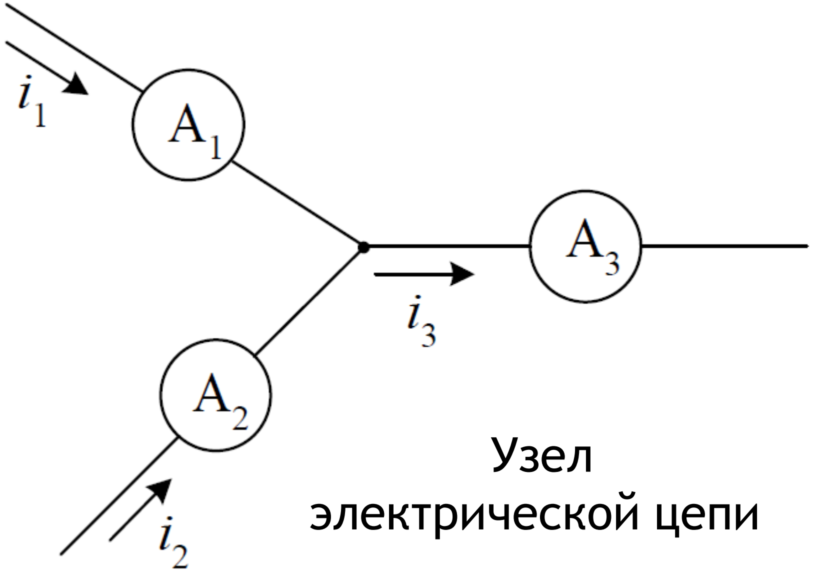
Так как сложению проекций соответствует сложение векторов и соответствующих им комплексных чисел, то справедливыми будут следующие уравнения, которые можно записать как для действующих, так и для амплитудных значений. **Законы Кирхгофа** в векторной форме:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{I}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{m} \bar{E}_k = \sum_{k=1}^{m} \bar{U}_k . \qquad (3)$$

Следовательно, возможны два способа расчёта цепей синусоидального тока:

- выполнение операций непосредственно над синусоидальными функциями времени по уравнениям (1) и (2)
- применение метода векторных диаграмм, основанного на уравнениях (3).

Применение метода расчёта непосредственно над синусоидальными функциями



Узел электрической цепи

В узле электрической цепи (рис. 4.4) сходятся три ветви. Даны токи двух ветвей:

$$i_1 = 8\,sin(\omega t + 30°),$$

$$i_2 = 6\,sin(\omega t + 120°).$$

Требуется записать выражение тока i_3 и определить показания амперметров электромагнитной системы.

1-й закон Кирхгофа для узла электрической цепи запишем как: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$, отсюда $i_3 = i_1 + i_2$, в результате:

$$i_3 = 8\,sin(\omega t + 30°) + 6\,sin(\omega t + 120°) = I_{3m}\,sin(\omega t + \psi_3)$$

Сумма двух синусоид одинаковой частоты есть тоже синусоида той же частоты. Её амплитуда и начальная фаза находятся по формулам:

$$I_{3m} = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2 \cdot I_{1m} \cdot I_{2m} \cdot cos(\psi_1 - \psi_2)} =$$

$$= \sqrt{8^2 + 6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos(30° - 120°)} = 10\ \text{А},$$

$$tg\psi_3 = \frac{I_{1m}\,sin\,\psi_1 + I_{2m}\,sin\,\psi_2}{I_{1m}\,cos\,\psi_1 + I_{2m}\,cos\,\psi_2} = \frac{8 \cdot sin\,30° + 6 \cdot sin\,120°}{8 \cdot cos\,30° + 6 \cdot cos\,120°} = 2{,}341,$$

откуда $\psi_3 = arctg\,2{,}341 = 66{,}87°$. Таким образом, $i_3 = 10\,sin(\omega t + 66{,}87°)$.

Применение метода расчёта с помощью векторных диаграмм

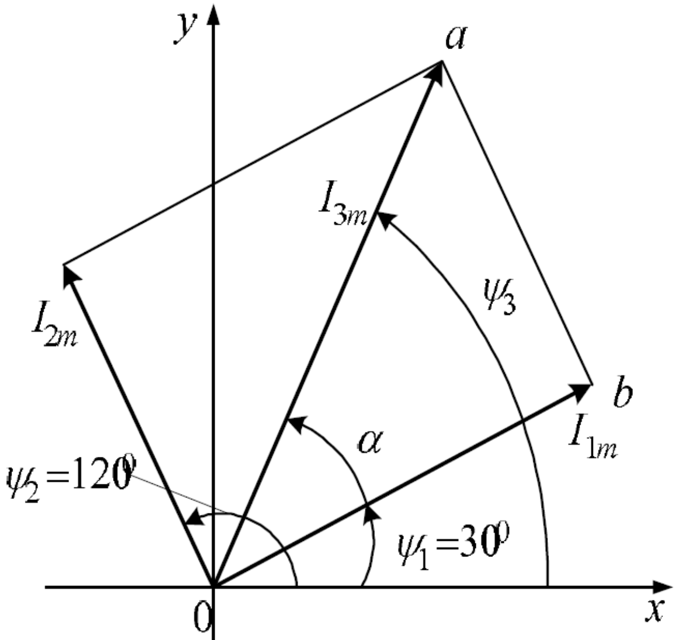


Рис. Векторная диаграмма токов

На примере, в соответствии с 1-м законом Кирхгофа в векторной форме для цепи, запишем:

$$\bar{I}_{3m} = \bar{I}_{1m} + \bar{I}_{2m}\,.$$

Построим в прямоугольной системе координат сумму векторов $\bar{I}_{1m}$ и $\bar{I}_{2m}$. Необходимо определить $\bar{I}_{3m}$

Так как треугольник oab – прямоугольный, а сторона ab равна длине вектора $\bar{I}_{2m}$, то в этом треугольнике:

$$I_{3m} = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ A}.$$

Начальная фаза ψ_3 тока I_{3m} равна углу наклона вектора $\bar{I}_{3m}$ горизонтальной оси

$$\psi_3 = \psi_1 + \alpha = \psi_1 + arctg\frac{I_{2m}}{I_{1m}} = 30^\circ + arctg\frac{6}{8} = 30^\circ + 36{,}87^\circ = 66{,}87^\circ.$$

Определяем показания аргументов. Известно, что приборы электромагнитной системы показывают действующие значения токов и напряжений. Поэтому

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{8}{1{,}41} = 5{,}66 \text{ А}, \quad I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{1{,}41} = 4{,}24 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{I_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{1{,}41} = 7{,}07 \text{ А}.$$

Проанализировав численные значения токов I_1, I_2 и I_3, обращаем внимание на то, что

$$I_1 + I_2 \neq I_3,$$

$$5{,}66 + 4{,}24 \neq 7{,}07.$$

Это не ошибка. Надо знать, что в цепях синусоидального тока для показаний приборов законы Кирхгофа не справедливы.

В итоге можно складывать только мгновенные значения токов (синусоидальные функции времени) и векторы. Однако складывать численные значения токов и напряжений, а также показания приборов нельзя.

Вопрос 1. Магнитная восприимчивость меньше нуля в случае…

○ **1**. … только парамагнетиков и ферромагнетиков.

○ **2**. … только диамагнетиков.

○ **3**. … только парамагнетиков.

○ **4**. …только ферромагнетиков.

○ **5**. ….всегда больше нуля.

Вопрос 2. Укажите, в каком из следующих уравнений Максвелла допущена ошибка?

1	2	3	4
$\oint B_n ds = 0$	$\oint H_l dl = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n ds$	$\oint H_l dl = \int_S \left(\vec{j}_{провод} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n ds$	$\oint D_n ds = \int_V \rho dV$

Вопрос 3. Как изменится плотность энергии магнитного поля соленоида и индуктивность соленоида, если ток соленоида увеличится втрое? (вблизи соленоида нет ферромагнетиков).

○ **1**. Плотность энергии уменьшится в три раза, индуктивность уменьшится в три раза.
○ **2**. Плотность энергии уменьшится в три раза, индуктивность не изменится.
○ **3** Плотность энергии увеличится в девять раз, индуктивность не изменится.
○ **4**. Плотность энергии увеличится в три раза, индуктивность увеличится в три раза.
○ **5**. Плотность энергии увеличится в три раза, индуктивность не изменится.

Вопрос 4. Полная энергия механического осциллятора, колеблющегося по закону $x = A\sin\omega t$

○ **1**. … пропорциональна x.
○ **2**. … пропорциональна A^2.
○ **3**. … пропорциональна $\sin(\omega t)$.
○ **4**. … пропорциональна ω.
○ **5**. … пропорциональна A.