# Колебания и волны

## Лекция 2(5)

## Сравнение основных теорем электростатики и магнитостатики.

До сих пор мы изучали ***статические*** электрические и магнитные поля, то есть такие поля, которые создаются *неподвижными* зарядами и *постоянными* токами. ***Основные уравнения***, описывающие свойства этих полей, приведены в таблице 1.

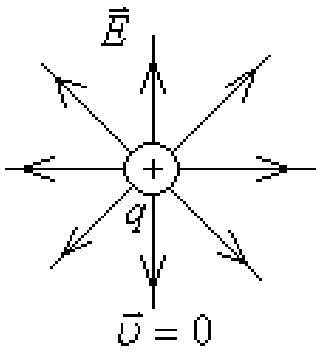
*Таблица 1*. **Основные уравнения электростатики и магнитостатики**.

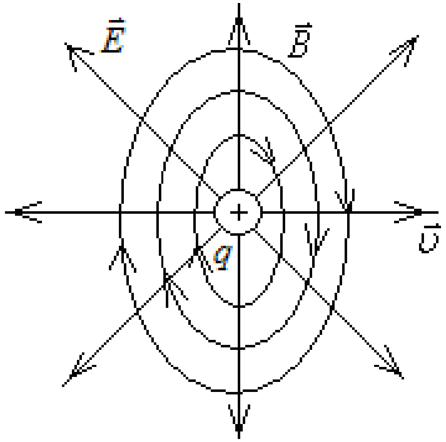
| | **Электростатика** | **Магнитостатика** |
|---|---|---|
| **Теорема Гаусса** | $\Phi_D = \oiint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum\limits_i q_i$ *Источники электрического поля – заряды* | $\Phi_B = \oiint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$ *Соленоидальность магнитного поля* |
| **Теорема о циркуляции поля** | $\oint\limits_l \vec{E}d\vec{l} = 0$ *Потенциальность электрического поля* | $\oint\limits_l \vec{H}d\vec{l} = \sum\limits_i I_i$ *Источники магнитного поля – токи* |
| **Материальные уравнения** | $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ | $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ |

**Первое,** на что обращает внимание сравнение этих уравнений – это то, что *постоянные* электрическое и магнитное поля имеют различную физическую сущность: источниками электростатического поля являются *заряды*, источниками магнитного поля - *постоянные токи*; электростатическое поле является *потенциальным*, а магнитное – *вихревым (соленоидальным)*.

**Второе**, что более важно для дальнейшего – это то, что система уравнений электростатики *не содержит* никаких характеристик *магнитного* поля, как и система уравнений магнитостатики *не содержит* никаких характеристик *электрического* поля. Другими словами, уравнения электростатики и магнитостатики являются *независимыми*, а электрические и магнитные поля, описываемые этими уравнениями, существуют *отдельно* одно от другого.

С другой стороны, нам известны по крайней мере два явления, которые указывают на *взаимосвязь* электрических и магнитных полей. Первое из них – появление *магнитного поля* у заряда, *движущегося относительно* неподвижного наблюдателя (или при движении наблюдателя *относительно* неподвижного заряда). В данном случае один и тот же объект – *электрический заряд* – является *источником* как *электрического*, так и *магнитного* полей.



# Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла.

Возникновение индукционного тока в *неподвижном* проводнике при изменении магнитного потока свидетельствует о появлении в контуре *сторонних сил*, приводящих в движение заряды. Как мы уже знаем, эти сторонние силы обусловлены возникающим в контуре особым *вихревым* электрическим полем , циркуляция которого по замкнутому контуру *отлична от нуля* и равна *ЭДС индукции:*

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}^* d\vec{l} \quad .$$

С другой стороны, в соответствии с *основным законом* электромагнитной индукции Фарадея, величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения потока магнитной индукции, то есть:

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad ,$$

где интегрирование производится по произвольной поверхности, опирающейся на контур.

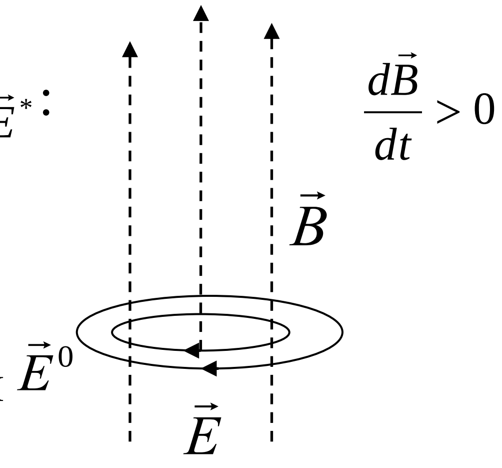
Приравнивая эти выражения, находим:

$$\oint_l \vec{E}^* d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad .$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля $\vec{E}^*$, *независимо* от того присутствует в этом пространстве проводящий контур или нет. Наличие контура лишь позволяет обнаружить это электрическое поле по возникновению индукционного тока в проводнике.

Вихревое электрическое поле.

В общем случае электрическое поле $\vec{E}$ слагается из *потенциального* поля $\vec{E}^0$, циркуляция которого по замкнутому контуру равна нулю, и *вихревого* поля $\vec{E}^*$:




$$\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^*,$$

где

$$\oint_l \vec{E}^0 d\vec{l} = 0.$$

На основании сказанного, сложив циркуляции полей $\vec{E}^*$ и , приходим к ***первому уравнению*** Максвелла в *интегральной* форме:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру, в правой части – по произвольной поверхности, опирающейся на этот контур.

## Второе уравнение Максвелла

В силу общности теоремы Гаусса применительно к любым векторным полям и отсутствия в природе «магнитных зарядов» (о чем уже говорилось ранее), ***второе уравнение*** Максвелла в *интегральной* форме совпадает с теоремой Гаусса для магнитной индукции:

$$\oiint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

Интегрирование производится по произвольной замкнутой поверхности *S*.

## *Гипотеза Максвелла о токе смещения. Взаимопревращаемость электрических и магнитных полей. Третье уравнение Максвелла*

Основная идея Максвелла – это идея о ***взаимопревращаемости*** электрических и магнитных полей. Максвелл предположил, что не только переменные магнитные поля являются источниками электрических полей, но и *переменные электрические* поля являются *источниками магнитных* полей. Согласно гипотезе Максвелла, изменяющееся во времени электрическое поле создает в окружающем пространстве *вихревое* магнитное поле $\vec{H}^*$, циркуляция которого по любому замкнутому контуру, равна скорости изменения потока электрической индукции $\vec{D}$ через поверхность, ограниченную этим контуром:

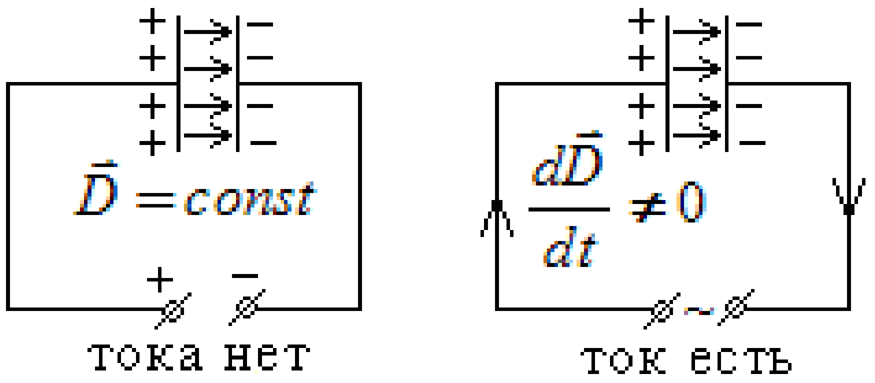
$$\oint_l \vec{H}^* d\vec{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D} d\vec{S}.$$

Величина, стоящая в правой части этого выражения, получила название ***тока смещения***:

$$I_{см} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D} d\vec{S}$$

Смысл введения этой величины можно пояснить следующим опытом. Конденсатор, подключенный к источнику *постоянного* тока, представляет собой разрыв цепи для тока проводимости, поэтому в такой цепи ток *не течет*. При этом в конденсаторе имеется электрическое поле, индукция которого .

$$\vec{D} = const$$




Если конденсатор подключить к источнику *переменного* тока, то, как показывает опыт, в цепи *будет течь* переменный ток. Его существование можно объяснить только тем, что в пространстве между обкладками ток проводимости *замыкается* током смещения, поскольку теперь $\vec{D} \neq const$ .

В этом случае конденсатор перестает представлять собой разрыв цепи.

В соответствии с гипотезой Максвелла *полный* ток в проводнике складывается из тока *проводимости* $I$ и тока *смещения* $I_{см}$ , каждый из которых является источником *своего* магнитного поля так, что общее магнитное поле, существующее вокруг проводника, есть:

$$\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^* \quad ,$$

где

$$\oint_l \vec{H}^0 d\vec{l} = I \quad .$$

Следовательно,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I + I_{см} \quad .$$

Если контур интегрирования охватывает несколько проводников с током, то в соответствии с *теоремой о циркуляции* магнитного поля, мы должны написать:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S} + \sum_i I_i$$

Написанное уравнение является ***третьим уравнением*** Максвелла в *интегральной* форме.

«Размазав» токи по площади поверхности $S$, опирающейся на контур $l$, можно записать последнее уравнение также в виде:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S} + \iint_S \vec{j} d\vec{S}$$

где $\vec{j}$ - плотность тока, протекающего через поверхность $S$.

По аналогии с плотностью тока проводимости величину

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

называют ***плотностью тока смещения.***

## Четвертое уравнение Максвелла.

***Четвертое уравнение*** Максвелла в *интегральной* форме совпадает с теоремой Гаусса для электрической индукции:

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum_i q_i$$

Интегрирование производится по произвольной замкнутой поверхности *S*, окружающей систему зарядов $q_i$ .

В случае непрерывного распределения зарядов в охваченном поверхностью *S* объеме *V*, это уравнение запишется в виде:

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \iiint\limits_V \rho dV$$

где ρ – объемная плотность заряда.

## *Дифференциальная форма уравнений Максвелла*.

**1.** Применяя *теорему Стокса*, преобразуем левую часть ***первого уравнения*** Максвелла к виду:

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = \iint_S rot\vec{E}d\vec{S}$$ .

Тогда само уравнение можно переписать как

$$\iint_S (rot\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})d\vec{S} = 0$$ ,

откуда, в силу произвольности поверхности интегрирования, имеем:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**2.** Применяя *теорему Остроградского* ко ***второму уравнению*** Максвелла, находим:

$$\oiint_S \vec{B}d\vec{S} = \iiint_V div\vec{B}dV = 0$$ ,

откуда, в силу произвольности объема интегрирования, имеем:

$$div\vec{B} = 0$$

**3.** Применяя *теорему Стокса*, преобразуем левую часть ***третьего уравнения*** Максвелла к виду:

$$\oint_S \vec{H}d\vec{l} = \iint_S rot\vec{H}d\vec{S}.$$

Тогда само уравнение можно переписать как

$$\iint_S \left(rot\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{j}\right)d\vec{S} = 0,$$

откуда, в силу произвольности поверхности интегрирования, имеем:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

**4.** Применяя *теорему Остроградского*, преобразуем левую часть ***четвертого уравнения*** Максвелла к виду:

$$\oiint_S \vec{D}d\vec{S} = \iiint_V div\vec{D}dV.$$

Тогда само уравнение можно переписать как

$$\iiint_V (div\vec{D} - \rho)dV = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема интегрирования, имеем:

$$div\vec{D} = \rho$$

## Замкнутая система уравнений Максвелла. Материальные уравнения.

Для замыкания системы уравнений Максвелла необходимо еще указать *связь* между векторами $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, то есть конкретизировать свойства *материальной среды*, в которой рассматривается электромагнитное поле. Если эти соотношения известны (они называются ***материальными уравнениями***), то по заданному распределению зарядов ρ и токов однозначно находится распределение электрических и магнитных полей в данной среде; или по заданному распределению полей находится распределение зарядов и токов. Для *однородной изотропной* среды материальные уравнения записывают обычно в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(E)\vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu(H)\vec{H} \quad .$$

Если среда не обладает сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами, то

$$\varepsilon(E) = \varepsilon = const \quad \text{и} \quad \mu(H) = \mu = const$$

В этом случае материальные уравнения имеют наиболее простой вид: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ $\quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

(в частности, для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$, тогда $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ ).

Следует подчеркнуть, что написанные соотношения справедливы только для *неподвижных сред*. В движущихся средах они имеют более сложный вид, обусловленный требованиями *релятивистской инвариантности* уравнений Максвелла.

*Таблица 2*. **Замкнутая система уравнений Максвелла.**

| **Интегральная форма** | **Дифференциальная форма** |
|---|---|
| $\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}d\vec{S}$ | $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| $\oiint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$ | $div\vec{B} = 0$ |
| $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}d\vec{S} + \iint_S \vec{j}d\vec{S}$ | $rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ |
| $\oiint_S \vec{D}d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$ | $div\vec{D} = \rho$ |
| **Материальные уравнения** | |
| $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ | $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ |

## Следствия из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Скорость света.

Рассмотрим некоторые основные следствия, вытекающие из уравнений Максвелла, приведенных в таблице 2. Прежде всего, отметим, что эти уравнения ***линейные***. Отсюда следует, что ***электромагнитное поле*** удовлетворяют ***принципу суперпозиции.***

Одним из *главных* следствий, вытекающих из уравнений Максвелла, является то, что электромагнитное поле может существовать в виде ***электромагнитных волн*** в отсутствие всяких зарядов и токов

( $\rho = 0; \vec{j} = 0$ ).

В этом случае уравнения Максвелла принимают вид (в дифференциальной форме):

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; div\vec{B} = 0 \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}; div\vec{D} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{cases}$$

Применяя к первому из этих уравнений операцию $rot$ , будем иметь:

$$rot(rot\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(rot\vec{B}) \quad .$$

Но согласно третьему уравнению (с учетом материальных уравнений):

$$rot\vec{B} = \mu\mu_0 rot\vec{H} = \mu_0\mu\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad .$$

Используя это соотношение, получим:

$$rotrot\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad .$$

Далее, принимая во внимание, что $rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E}$ , причем в силу четвертого уравнения $div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}div\vec{D} = 0$ , приходим к так называемому ***волновому уравнению*** для электрического поля $\vec{E}$

$$\Delta E - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

где обозначено

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа (в декартовых координатах).

Аналогичное волновое уравнение получается для магнитного поля : $\vec{H}$

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Совместным решением этих уравнений является векторная ***волновая функция*** электромагнитного поля:

$$\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{H}_0\end{pmatrix}\exp\left[i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{v})\right], \qquad \vec{r} = \vec{r}(x, y, z).$$

Коэффициент $\upsilon$ имеет смысл ***фазовой скорости*** электромагнитной волны:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}}$$

Для вакуума: $\varepsilon = 1; \mu = 1$. Тогда: $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 12{,}57\cdot 10^{-7}}} = 3\cdot 10^8$ м/с,

что совпадает со ***скоростью света*** в вакууме *с*. Таким образом, мы приходим к выводу, что ***свет*** – это ***электромагнитная волна.***

В прозрачной диэлектрической среде скорость света $\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$

где величина $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется ***показателем преломления*** среды. Для многих *оптически прозрачных* сред эта формула дает хорошие совпадения с измеренными на опыте значениями *n*, что также является одним из достижений теории Максвелла.