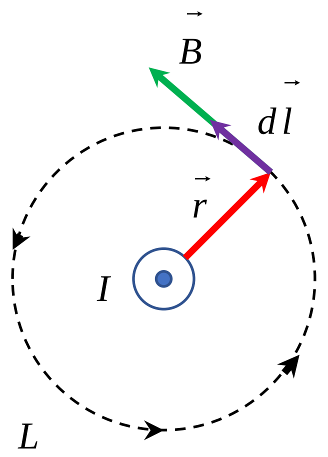
Колебания и волны

Лекция 1(4)

Примеры применения теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$

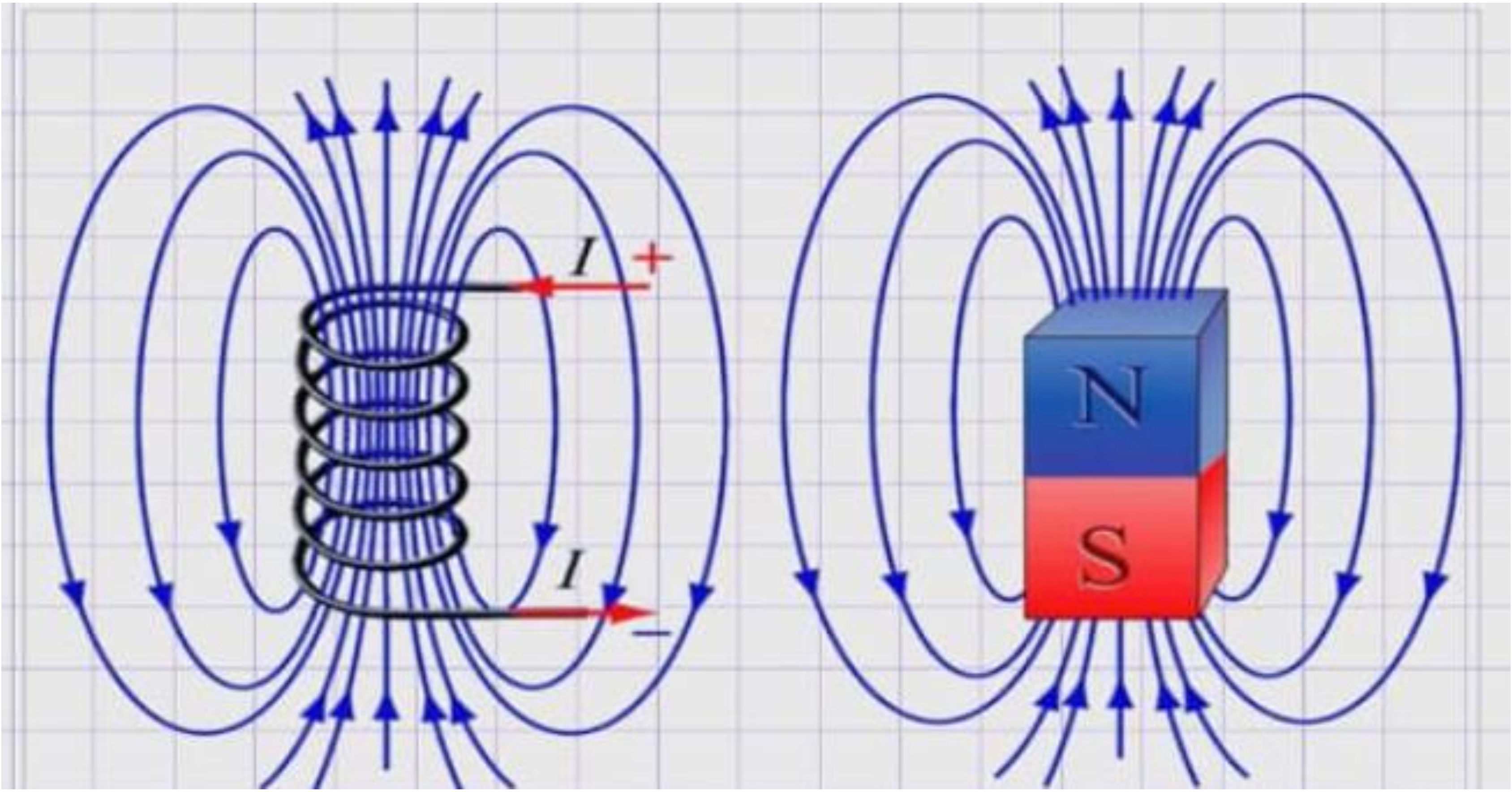
1. Магнитное поле прямого тока



- Замкнутый контур представлен в виде окружности радиуса r.
- В каждой точке этой окружности вектор магнитной индукции B одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности:

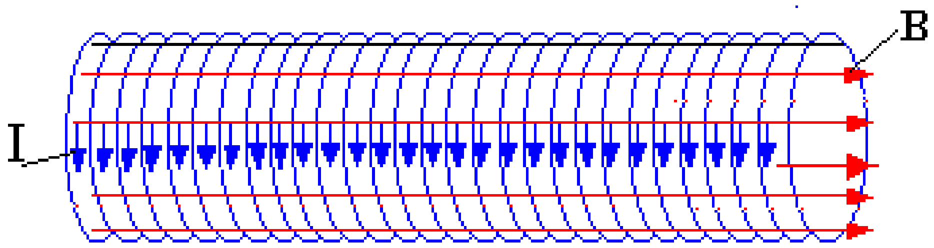
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \oint_L B\cos 0^\circ\,dl = B\oint_L dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$



I
+
I
−
N
S

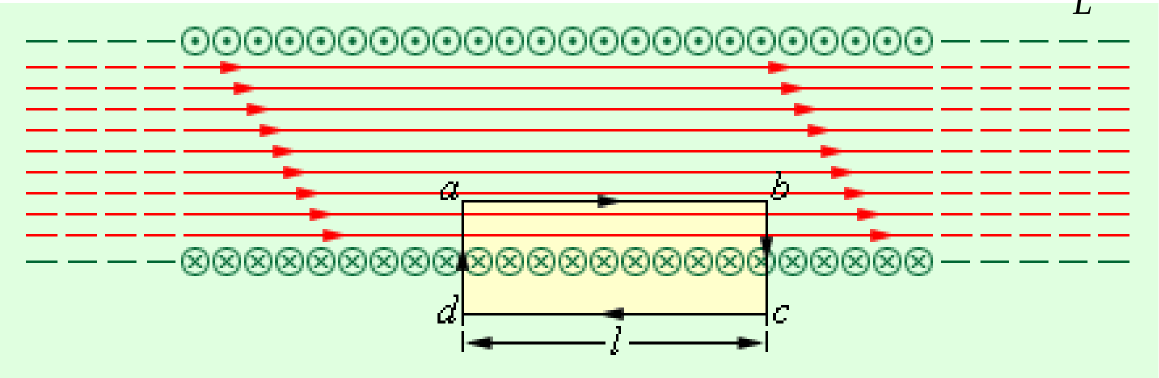
ПОЛЕ ДЛИННОГО СОЛЕНОИДА



$$\oint_L \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$\oint_L \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = \int_a^b B_l dl + \int_b^c B_l dl +$$

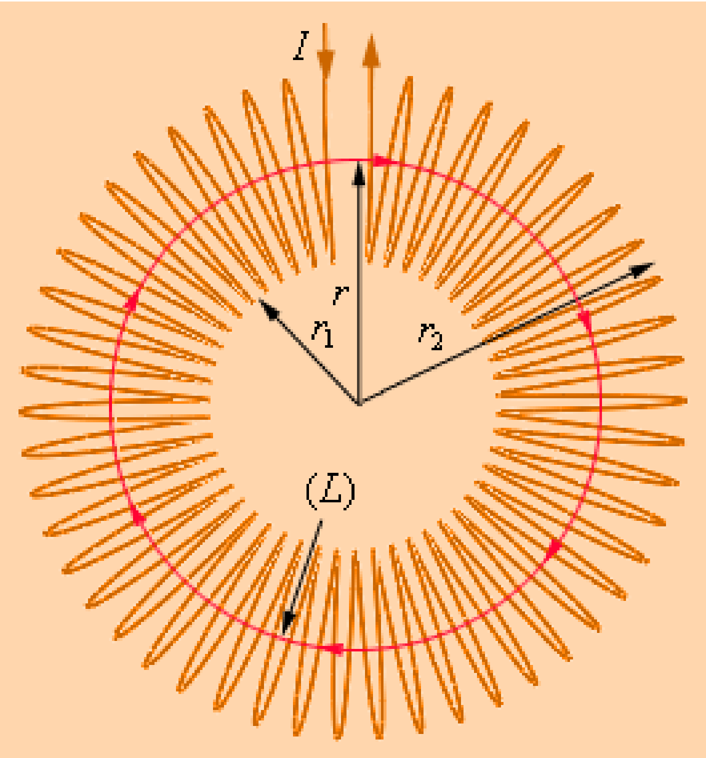
$$+ \int_c^d B_l dl + \int_d^a B_l dl = \int_a^b B_l dl = Bl$$



$$\sum_{i=1}^{N} I_i = NI \Rightarrow \qquad Bl = \mu_0 NI \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI}$$

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОРОИДА



$$\oint_L \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i \qquad \vec{B}\,\vec{dl} = B\,dl;$$

$$r = const \Rightarrow B(r) = const \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B\,2\pi r \Rightarrow$$

$$B\,2\pi r = \mu_0 IN \Rightarrow$$

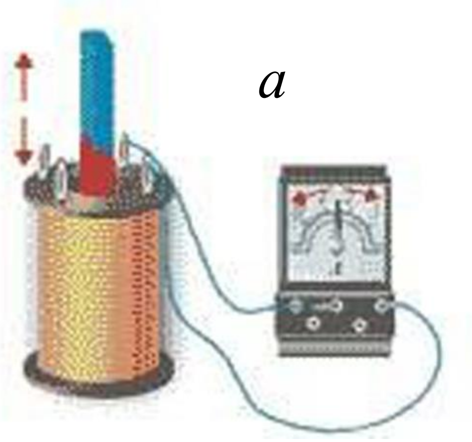
$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r};} \qquad B_{max} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r_1}; \qquad B_{min} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r_2}.$$

Опыты Фарадея (1831)

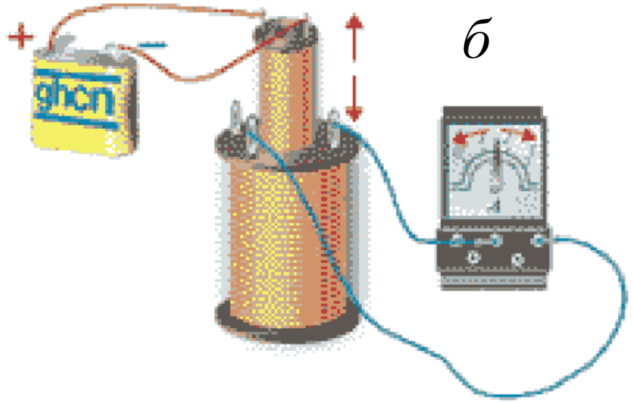
а) движение магнита относительно катушки (или наоборот); *б*) движение катушек относительно друг друга; *в*) изменение силы тока в цепи первой катушки (с помощью реостата или замыканием и размыканием выключателя); *г*) вращение контура в магнитном поле; *д*) вращение магнита внутри контура.

Майкл Фарадей 1791-1867

а

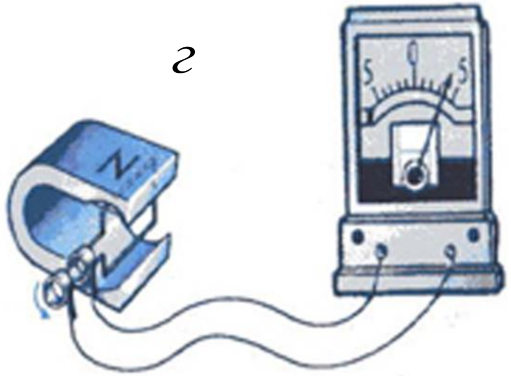


б

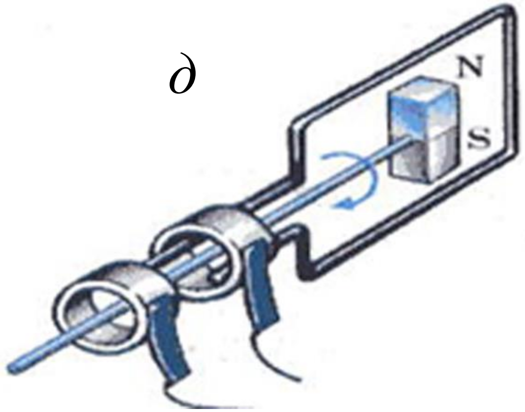


в

г



д



Электромагнитная индукция (1831)

Электромагнитной индукцией (от лат. *inductio* – наведение) называется явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, пронизывающей площадь этого контура (т.е. сцепленного с этим контуром).

Появление такого тока называют его индукцией, а сам возникающий ток – индукционным.

Майкл Фарадей 1791-1867

$$\Phi = B_n S = BS\cos(\vec{n},\vec{B}) = \mu_0 \mu H S \cos(\vec{n},\vec{B})$$

Величина индукционного тока не зависит от способа изменения магнитного потока, а определяется лишь скоростью его изменения.

$$I_{инд} \sim \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow I_{инд} \sim \frac{\varepsilon^{инд}}{R} \Rightarrow \boxed{\varepsilon^{инд} \sim \frac{d\Phi}{dt}}$$

Сила индукционного тока (ЭДС индукции) пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность контура.

Правило Ленца (1834)

Индукционный ток всегда имеет такое направление, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало тому изменению магнитного потока, которое вызвало этот индукционный ток.

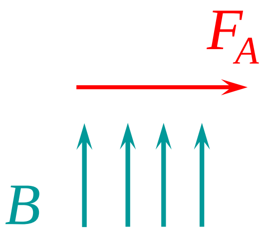
Генрих Фридерик Эмиль Ленц 1804-1865

Закон электромагнитной индукции (Фарадея-Ленца)

ЭДС электромагнитной индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

$$\boxed{\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Правило Ленца непосредственно вытекает из закона сохранения энергии. На проводник с током действует сила Ампера. Под ее действием возникает движение. Физическое объяснение: при движении на каждый электрон действует сила Лоренца.



$$\vec{F}_A = IBl\,\sin(d\vec{l}, \vec{B})$$

$$d\Phi = B\,dS\,\cos(\vec{n}, \vec{B}) = Bl\mathrm{v}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\mathrm{v}}$$

В противном случае: $I\uparrow \Rightarrow F_A\uparrow \Rightarrow \mathrm{v}\uparrow \Rightarrow d\Phi\uparrow \Rightarrow I\uparrow$

Вывод формулы для ЭДС индукции из закона сохранения энергии (метод Гельмгольца)

Работа источника тока (ЭДС сторонних сил) идет на выделение тепла и перемещение проводника с током:

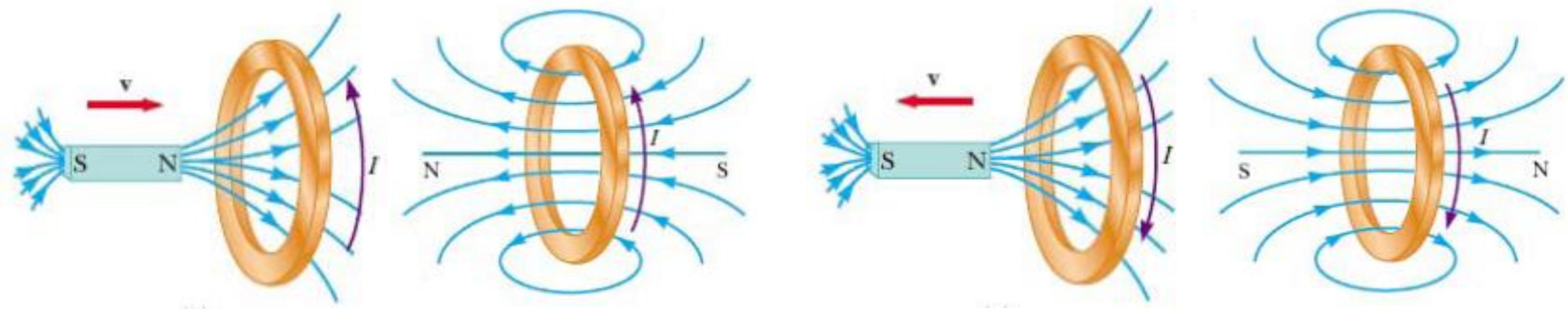
$$dA = I\mathcal{E}\,dt = I^2R\,dt + I\,d\Phi \;\Rightarrow\; \mathcal{E} = IR + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$I = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}\right) = I_{пров} - I_{инд} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathcal{E}^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц 1821-1894

ЭДС индукции выражается в вольтах:

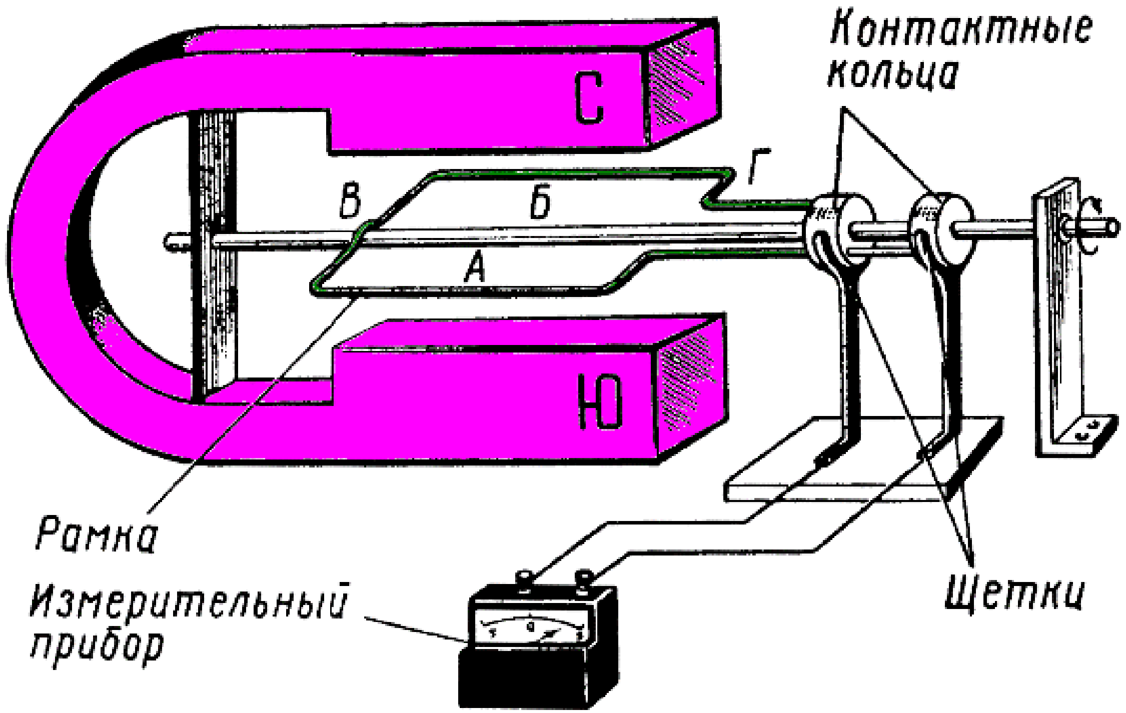
$$\left[\frac{Вб}{сек}\right] = \left[\frac{Тл\cdot м^2}{сек}\right] = \left[\frac{Н\cdot м^2}{А\cdot м\cdot сек}\right] = \left[\frac{Дж}{А\cdot сек}\right] = \left[\frac{А\cdot В\cdot сек}{А\cdot сек}\right] = [В]$$



Применение электромагнитной индукции

Генератор переменного тока

Генератором переменного тока называется электромеханическое устройство, преобразующее механическую энергию в электрическую.



$$\Phi = B S \cos \omega t$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B S \omega \sin \omega t$$

$$\boxed{\mathcal{E}^{\max} = B S \omega}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Гц}$$

$$\mathcal{E}^{\max} = N B S \omega$$

Электродвигатель

Наоборот – электродвигатель (первый двигатель – Б.С.Якоби, 1836, приведение в движение лодки на Неве от батареи в 320 гальванических элементов).

Применение электромагнитной индукции

Вихревые токи – Токи Фуко (1855)

В массивных проводниках получаются токи, замкнутые в толще самого проводника – *вихревые*.

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Полезно:

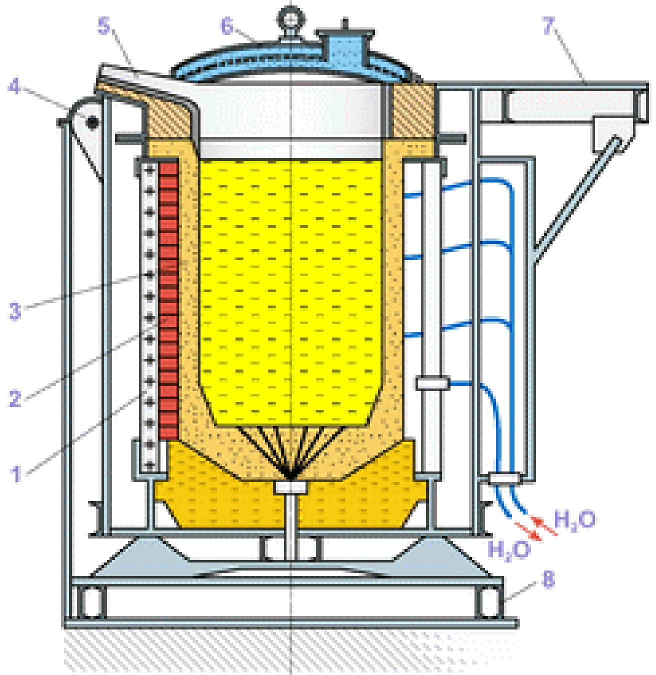
Индукционные печи для плавки сверхчистых металлов переменным током высокой частоты.

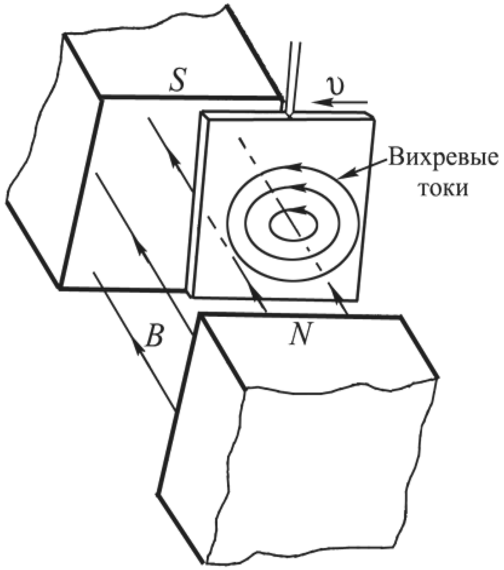
Вредно:

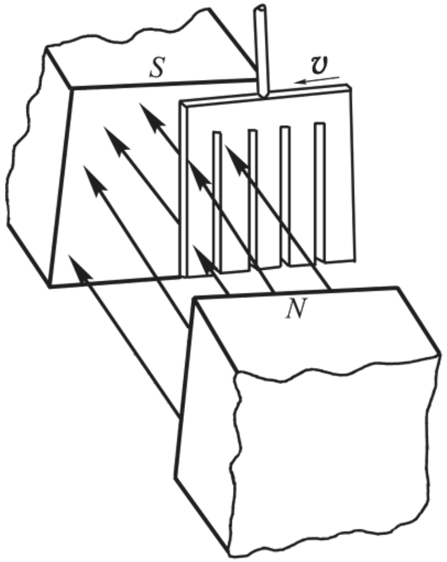
Сердечники трансформаторов набирают из отдельных тонких изолированных лаком пластин железа так, чтобы вихревые токи были перпендикулярны плоскости пластин.

Жан Бернар
Леон Фуко
1819-1868

ИНДУКЦИОННАЯ ТИГЕЛЬНАЯ ПЕЧЬ







Самоиндукция

Самоиндукцией называется возникновение ЭДС индукции в контуре при изменении в нем силы тока.

При увеличении силы тока в цепи самоиндукция препятствует его возрастанию, при уменьшении – убыванию, т.е. подобна явлению инерции в механике.

Джозеф Генри 1797-1878

$$I \sim B \longrightarrow \Phi \sim B \longrightarrow \Phi \sim I \qquad \boxed{\Phi = L I}$$

Коэффициент пропорциональности *L* между силой тока и магнитным потоком называется индуктивностью

Зависит от геометрии контура (формы и размеров) и магнитных свойств среды.

Единица индуктивности

Единицей индуктивнсти в СИ – генри (1 Гн) называется индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе один ампер (1 А) равен

Индуктивность соленоида

$$B = \mu_0 \mu n I = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I \longrightarrow \Phi = B S N = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S I \longrightarrow \boxed{L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S}$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S = \mu_0 \mu \frac{(nl)^2}{l} S = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V$$

Индуктивность соленоида пропорциональна квадрату числа витков на единицу его длины, объему соленоида и магнитной проницаемости вещества сердечника соленоида.

ЭДС самоиндукции

ЭДС самоиндукции пропорциональна индуктивности контура и скорости изменения тока в нем.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}$$

Потокосцепление (полный магнитный поток)

Потокосцеплением контура, состоящим из нескольких витков, называется произведение магнитного потока, сцепленного с каждым витком, на число витков.

$$\Psi = \sum_N \Phi = N\Phi \quad \Rightarrow \quad \Psi = LI$$

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Явление взаимной индукции. Коэффициент взаимной индукции.

Взаимная индуктивность

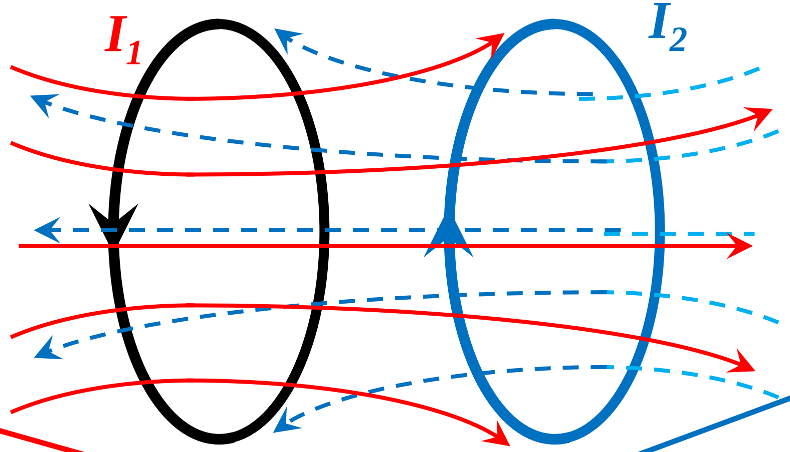
$\Phi_1 = L_1 I_1$

$\Phi_{21} \sim I_1$

$\Phi_{21} = L_{21} I_1$

$\frac{dI_1}{dt} \neq 0$

Связанные контура



$\Phi_2 = L_2 I_2$

$\Phi_{12} \sim I_2$

$\Phi_{12} = L_{12} I_2$

$\frac{dI_2}{dt} \neq 0$

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

$$\boxed{L_{12} = L_{21} = M}$$

Коэффициент взаимной индукции, или взаимная индуктивность

М зависит

- от свойств каждого контура: размеры, число витков,
- взаимного расположения контуров: взаимная ориентация, расстояние,
- магнитных свойств среды: наличие магнитопровода - **трансформатор**

Взаимоиндукция

Взаимоиндукцией называется явление, в котором обнаруживается явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом контуре, если их пронизывает общий магнитный поток. Такие контура называются связанными.

Текущий в контуре *1* ток I_1 создаст в контуре 2 магнитный поток:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Аналогично текущий в контуре *2* ток I_2 создаст в контуре 1 магнитный поток:

$$\Phi_1 = L_{12} I_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

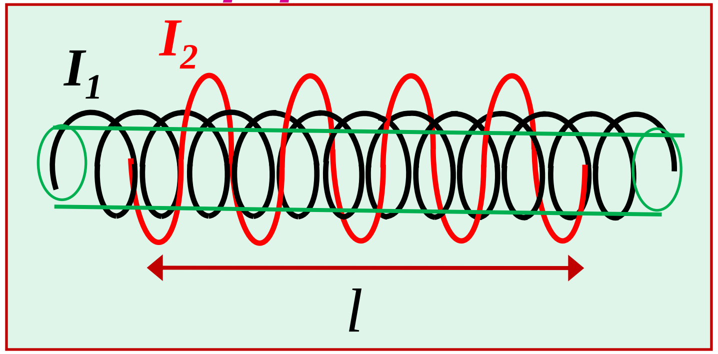
Коэффициенты L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров. Точные расчеты показывают, что они равны друг другу.

$$\boxed{L_{21} = L_{12} = M}$$

Трансформатор

Трансформатором называется устройство для повышения или понижения напряжения переменного тока
(П.Н.Яблочков, И.Ф.Усагин, 1876).

Коэффициент взаимной индукции 2-х длинных соленоидов, имеющих общую ось



Соленоиды 1 и 2 имеют общий сердечник, одинаковые длину ℓ и площадь поперечного сечения S

Потокосцепление и поток м.и., создаваемый током I_1 *через* ***2-й соленоид***

$$\Psi_{21} = L_{21} I_1$$

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = n_2 l \Phi_{21}$$

$$\Phi_{21} = B_1 S_1 = \mu \mu_0 n_1 I_1 S_1$$

$$\Psi_{21} = \boxed{\mu \mu_0 n_1 n_2 l S} I_1$$

Симметрия отн. 1 и 2

Потокосцепление и поток м.и., создаваемый током I_2 *через* ***1-й соленоид***

$$\Psi_{12} = L_{12} I_2$$

$$\Psi_{12} = N_1 \Phi_{12} = n_1 l \Phi_{12}$$

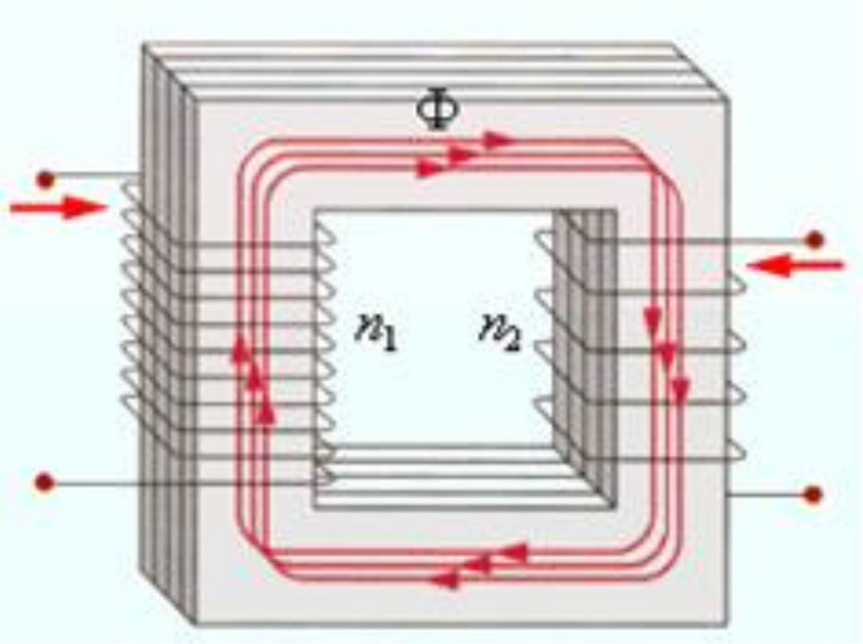
$$\Phi_{12} = B_2 S_1 = \mu \mu_0 n_2 I_2 S_1$$

$$\Psi_{12} = \boxed{\mu \mu_0 n_1 n_2 l S} I_2$$

$$L_{21} = L_{12} = M = \mu \mu_0 n_1 n_2 l S$$

Трансформатор

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \qquad \varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = k$$

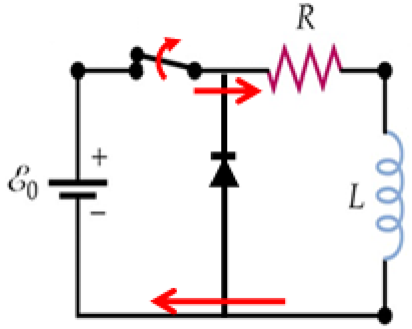
Коэффициент трансформации

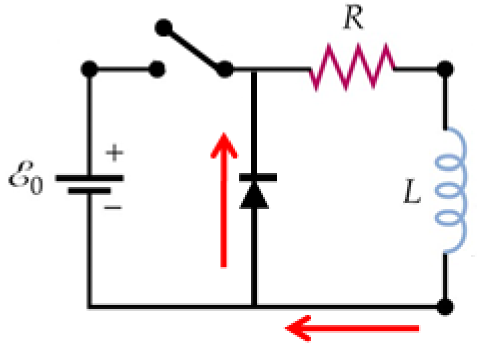
Коэффициент трансформации показывает, во сколько раз напряжение в первичной обмотке больше/меньше чем во вторичной. При $k > 1$ трансформатор повышающий, при $k < 1$ – понижающий.

$$\varepsilon_2 I_2 = \varepsilon_1 I_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = k = \frac{I_1}{I_2}}$$

Применяются в основном в линиях электропередач, поскольку потери на разогрев проводов (Джоулево тепло) пропорциональны квадрату текущего тока.

Энергия магнитного поля.





После отключения от источника питания продолжает идти ток:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Совершается работа, выделяется тепло

$$dA = \varepsilon_i I dt = -\frac{d\Psi}{dt} I dt = -I d\Psi$$

$$\Psi = LI \qquad d\Psi = L dI \qquad dA = -LIdI$$

$$A = -\int_t^0 LIdI = \frac{LI^2}{2}$$

Идёт на нагревание.

При этом магнитное исчезает.

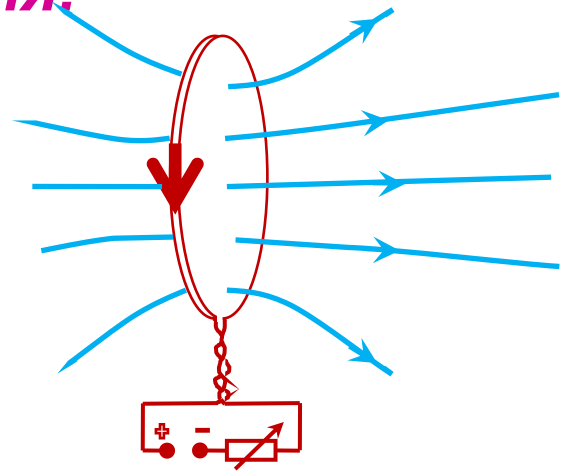
Ничего другого не происходит

Магнитное поле является источником энергии, за счёт которого совершается работа

Контур, по которому течёт ток, обладает энергией, сосредоточенной в магнитном поле

$$\boxed{W = \frac{LI^2}{2}}$$

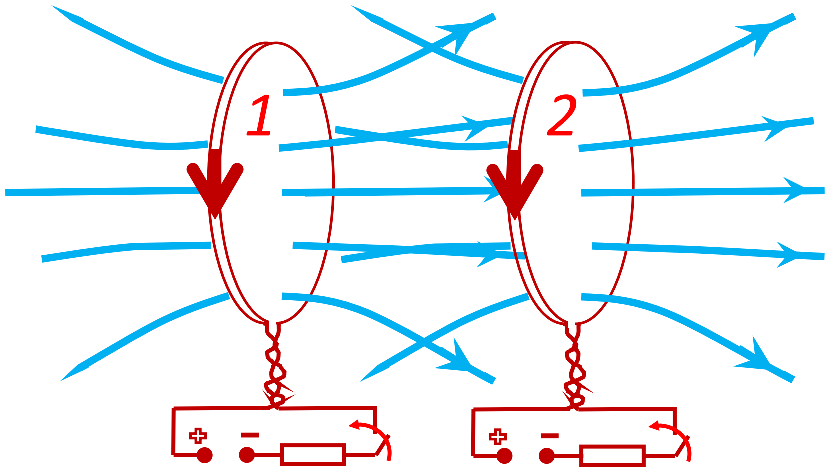
Энергия магнитного поля.



Энергия контура с током:

$$W = \frac{LI^2}{2}$$

Энергия 2-х связанных контуров с током.



$$W_m = \frac{L_1 I_{01}^2}{2} + \frac{L_2 I_{02}^2}{2} + M I_{01} I_{02}$$

Энергия магнитного поля.

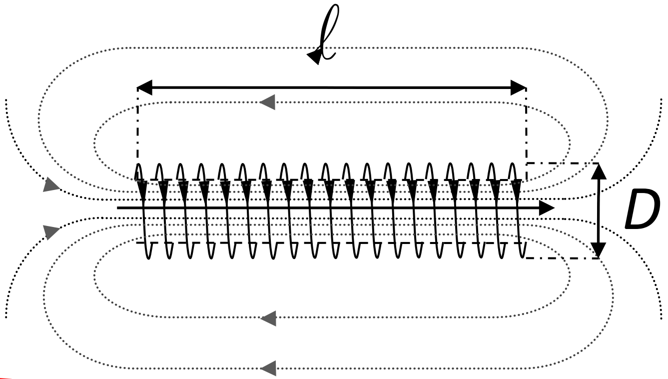
Контур, по которому течёт ток, обладает энергией, сосредоточенной в магнитном поле

$$W = \frac{LI^2}{2}$$

Энергия магнитного поля в контуре образовалась при включении цепи, за счёт работы, совершаемой источником ЭДС, против ЭДС самоиндукции.

Выразим энергию магнитного поля через его силовые характеристики.

Для длинного соленоида



$$L = \mu_0 \mu n^2 lS = \mu_0 \mu n^2 V$$

$$B = \mu_0 \mu n I$$

$$W = \frac{LI^2}{2}$$

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$

Энергия **однородного** магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}$$

Плотность энергии

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu_0 \mu n^2 V \frac{H^2}{2n^2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V = \frac{BH}{2} V$$

$$L = \mu_0 \mu n^2 V$$

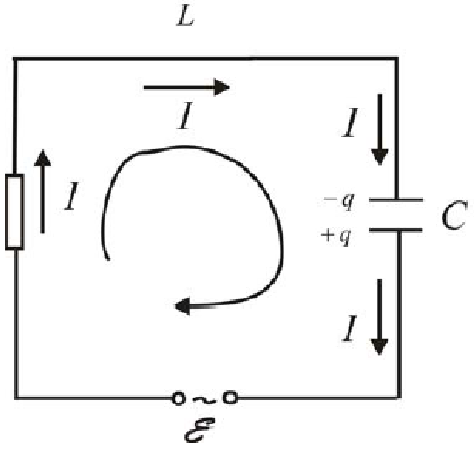
$$H = nI$$

$$B = \mu_0 \mu H$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}}$$

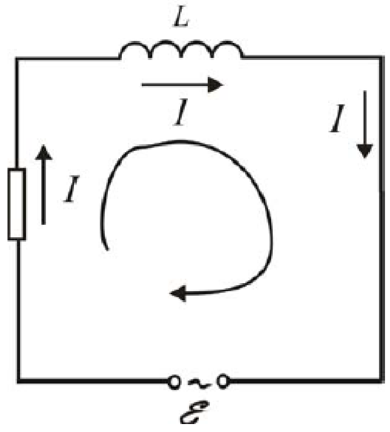
Переходные процессы в RC- и RL-цепях.



$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=\mathscr{E},\Rightarrow Rc\frac{dq}{dt}=c\mathscr{E}-q,\Rightarrow \frac{dq}{c\mathscr{E}-q}=\frac{dt}{Rc}.$$

$$\ln\left|c\mathscr{E}-q\right|=-\frac{t}{Rc}+const.\ \text{При}\ t=0\ const=\ln\left|c\mathscr{E}\right|,$$

$$c\mathscr{E}-q=c\mathscr{E}\cdot e^{-\frac{t}{Rc}};\Rightarrow q=c\mathscr{E}(1-e^{-\frac{t}{Rc}}).$$



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}=\mathscr{E};\Rightarrow L\frac{dI}{dt}+RI=\mathscr{E};$$

$$c\to\frac{1}{R};\quad R\to L;\quad q\to I.$$

$$I=\frac{1}{R}\mathscr{E}(1-e^{-\frac{Rt}{L}}).$$